UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Descomposición monomial y sumabilidad para funciones holomorfas en altas dimensiones

Mansilla, Martín Ignacio

Director: Dr. Daniel E. Galicer

Director Asistente: Dr. Santiago Muro

Fecha de defensa: 20/12/2019

Descomposición monomial y sumabilidad para funciones holomorfas en altas dimensiones

Resumen

El objetivo de esta tesis es contribuir a la teoría de funciones holomorfas y polinomios homogéneos en varias e infinitas variables. Estudiamos diversos objetos que, de una u otra manera, involucran la sumabilidad de los coeficientes de polinomios homogéneos dependiendo de su norma uniforme.

Comparamos las normas uniforme y de coeficientes en espacios de polinomios homogéneos en varias variables complejas. En particular estudiamos el comportamiento asintótico de las constantes de equivalencia entre estas dos normas cuando la cantidad de variables tiende a infinito.

Damos una descripción completa del comportamiento asintótico de las constantes de incondicionalidad mixtas en espacios de polinomios homogéneos en finitas variables. Para lograrlo resulta indispensable el estudio que hacemos de los conjuntos de convergencia monomial para estos espacios de polinomios. En este sentido conseguimos un progreso sustancial en la caracterización de dichos conjuntos para el caso de polinomios homogéneos en ℓ_r cuando $1 < r \leqslant 2$, probando una conjetura abierta en el área.

Introducimos novedosas descomposiciones en el conjunto de monomios, que son de gran utilidad para atacar problemas de incondicionalidad y sumabilidad permitiendo un manejo adecuado de la dependencia entre el grado de homogeneidad y la cantidad de variables en ciertas desigualdades.

Definimos el radio de Bohr mixto extendiendo la noción preexistente de radio de Bohr. Usando dichas descomposiciones mostramos, para todo el espectro de parámetros involucrados, cuál es el comportamiento asintótico de este radio.

También gracias a dichas descomposiciones, conseguimos resultados acerca de los conjuntos de convergencia monomial de otras familias de funciones holomorfas. Para $H_b(\ell_r)$, las funciones enteras y acotadas en conjuntos acotados en ℓ_r, caracterizamos aquellos conjuntos de convergencia cuando $1 < r \leqslant 2$. Cuando $r > 2$ logramos hacerlo para $H_b(\ell_{r,\infty})$ y damos cotas superiores e inferiores en el caso de $H_b(\ell_r)$. Hacemos un avance significativo para el caso de funciones holomorfas y acotadas en la bola de ℓ_r con $1 < r \leqslant 2$.

Monomial decomposition and summability for holomorphic functions in high dimensions

Abstract

This thesis aims to contribute to the theory of holomorphic functions and homogeneous polynomials in several and infinitely many variables. We study several objects that, in one way or another, involve the summability of homogeneous polynomial coefficients depending on their uniform norm.

We compare the uniform and the coefficients norms in spaces of homogeneous polynomials in several complex variables. In particular, we study the asymptotic behaviour of the equivalence constants between these two norms when the number of variables goes to infinity.

We give a complete description of the asymptotic behaviour of the mixed unconditional constants in spaces of homogeneous polynomials with finite variables. To achieve this it is essential that we study the sets of monomial convergence for these spaces of polynomials. In this sense, we make a substantial progress in the characterization of these sets in the case of homogeneous polynomials on ℓ_r when $1 < r \leqslant 2$ proving an open conjecture in the area.

We introduce novel decompositions of the set of monomials, which are very useful to attack problems of unconditionality and summability allowing an adequate management of the dependence between the degree of homogeneity and the number of variables in certain inequalities.

We define the mixed Bohr radius extending the preexisting notion of Bohr radius. Using these decompositions we show, for the entire spectrum of parameters involved, the asymptotic behaviour of this radius.

Also thanks to these decompositions, we get results for the sets of monomial convergence of other families of holomorphic functions. For $H_b(\ell_r)$, the entire functions and bounded in their bounded sets in ℓ_r, we characterize their sets of convergence when $1 < r \leqslant 2$. When $r > 2$ we manage to do it for $H_b(\ell_{r,\infty})$ and give upper and lower bounds in the case of $H_b(\ell_r)$. We make significant progress in the case of holomorphic and bounded functions in the ball of ℓ_r with $1 < r \leqslant 2$.

Agradecimientos

A Dany por haber confiado en mí y por intentar, hasta el cansancio, que aprenda a usar las palabras “como” y “porque” (no está muerto quien pelea). A él y a Santi por haberme enseñado a investigar con gran dedicación y porque siempre fue un placer trabajar juntos.

A los jurados Jorge, Nacho y Andreas por haber aceptado serlo tan generosamente.

Al CONICET por permitirme hacer lo que me gusta, aunque siempre se haya olvidado del aguinaldo.

A la educación pública por enseñarme a aprender. A la educación popular por enseñarme a enseñar.

A la FCEyN por ser mi segunda casa.

Al grupo de análisis funcional por ser una gran familia además de un espectacular grupo de investigación.

A todes mis amigues de la facultad, sin elles no hubiera sido lo mismo.

A todes mis amigues y compas de militancia, por enseñarme a construir y luchar.

Al tridente de longevos Nelly, Lola y Pipi-pupi, por criarme y quererme y por estar tan pendientes de este logro. Casi llegan, esto se los dedico a ustedes.

A mis viejos Nunchy y Gabi, por enseñarme a ser libre y apoyarme en todo lo que hago.

A Pili por ser tan genia e intensa como buena hermana y por interesarse en las cosas que hago.

A mis tías y mis primes.

A Beto, el Conde, Coko, Darongo, Dogui, Fefe, Luchija, Malva, Paloma, Pepi y Yankee, por 12 años de eterna amistad.

A Tami, por bancarme y quererme como soy y por ser el amor de mi vida.

Introducción

El análisis complejo de una variable es una de las teorías más influyentes de la matemática. Muchas otros campos de la ciencia, dentro y fuera de la matemática se relacionan fuertemente con ella: la teoría de números, las ecuaciones diferenciales, el analisis armónico, la mecánica de fluídos, el electromagnetismo, la mecánica cuántica, entre otras, no serían lo mismo sin la potencia del análisis complejo. Dentro de esta teoría uno de los pilares fundamentales es la equivalencia entre derivabilidad y analiticidad. Es decir, resulta lo mismo para una función ser derivable en un abierto del plano complejo a que se escriba localmente como una serie de potencias. Este hecho sigue valiendo para funciones complejas de varias variables, pero ¿qué sucede en el caso de tener infinitas variables?

La idea de desarrollar una teoría de análisis complejo en infinitas variables comenienza a principios del siglo XX con los trabajos de Hilbert, Fréchet y Gâteaux, entre otros. En este contexto el problema de relacionar la derivabilidad de una función con su expansión en serie de Taylor se vuelve más sutil. Estudiando funciones en la bola de c_0 Hilbert propone trabajar con aquellas aplicaciones que puedan escibirse como combinaciones lineales infinitas de los monomios, es decir

$$f(z) = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}.$$

Hilbert [Hil09] declara, sin una demostración, que éstas deberían ser exactamente las funciones holomorfas en la bola de c_0. Sin embargo Toeplitz da en [Toe13] el ejemplo de una función holomorfa y un punto en c_0 para el cual su expansión monomial no converge, contradiciendo los dichos de Hilbert.

En el desarrollo de la noción adecuada de holomorfía en infinitas variables se hace fuerte la visión dada por la Fréchet-diferenciabilidad de la función. Dado X un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ y un abierto $U \subset X$ una función a valores complejos será holomorfa sobre U si cumple la condición de diferenciabilidad dada por el cociente incremental. Este punto de vista muestra ser muy fructífero permitiendo un desarrollo del análisis complejo infinito dimensional consistente y productivo. Un hecho fundamental de esta definición es que existe, para toda función holomorfa $f : U \subset X \to \mathbb{C}$ y todo punto $z_0 \in U$, una suerte de expansión de Taylor: hay polinomios m-homogéneos $P_m(f)(z_0)$ de forma que

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{m\geqslant 1} P_m(f)(z_0)(z - z_0),$$

para todo z en un entorno de z_0. Estos polinomios homogéneos son objetos un tanto más abstractos que los monomios pero, de todas formas, de gran utilidad.

En algunos espacios de Banach, por ejemplo en ℓ_∞ o c_0, se puede pensar en monomios de la forma $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$ con $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ por ser espacios formado por sucesiones. Esta estructura adicional no la tiene cualquier espacio de Banach y permite hablar de un desarrollo monomial. La definicón a través de la diferenciabilidad brinda una teoría más general, mientras que la idea de Hilbert tiene el potencial de basarse en el concepto más concreto de los monomios. En busca de reconciliar la visión de Hilbert con aquella que se terminaría adoptando para definir a las funciones holomorfas se plantean algunos interrogantes. Dado un espacio de Banach X (con una estructura extra que permita darle sentido a los monomios) y una función f holomorfa en la bola de X, caben las siguientes preguntas:

- ¿Tiene siempre sentido pensar en una expresión de la forma $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha$?
- Si es que lo tiene, ¿para qué elementos z de la bola vale que $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha$?

Estos interrogantes promueven el estudio de la convergencia monomial de familias de funciones holomorfas. En [DMP09] se comienza una investigación sistemática de este tipo de cuestiones. Para los espacios de Banach X que además sean de sucesiones, es decir, $X \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ con inclusiones contínuas $\ell_1 \hookrightarrow X \hookrightarrow \ell_\infty$, puede considerarse siempre la noción de monomio. Dados un espacio de Banach de sucesiones X y una función f holomorfa en todo el espacio X (o en su bola, por ejemplo) queda definida una sucesión $(a_\alpha(f))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ de forma que

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha,$$

para todo z con soporte finito y en el dominio de f. Así, dada una familia de funciones holomorfas $\mathcal{F}$ se define su conjunto de convergencia monomial como

$$mon\mathcal{F} = \left\{ z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_\alpha |a_\alpha(f) z^\alpha| < \infty \text{ para toda } f \in \mathcal{F} \right\}.$$

En [DMP09] los autores introducen dos resultados claves en esta teoría vinculando el estudio de los conjuntos de convergencia monomial de ciertas familias de funciones holomorfas con el comportamiento asintótico de la constante de incondicionalidad mixta de los espacios de polinomios homogéneos. Además se obtienen varios resultados en pos de caracterizar estos conjuntos para ciertas familias muy naturales de funciones holomorfas sentando las bases de su estudio.

No es para nada sencillo describir estos conjuntos de convergencia monomial en general y ni siquiera lo es en ejemplos concretos de familias de funciones holomorfas. En el caso de ℓ_1, gracias al trabajo de Ryan en [Rya87] y Lempert en [Lem99], se sabe que $mon\mathcal{P}(^m\ell_1) = \ell_1$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y que $monH_\infty(B_{\ell_1}) = \ell_1$. Para ℓ_∞ (el otro extremo del espectro), en el excepcional trabajo de Bayart, Defant, Frerick, Maestre y Sevilla-Peris [BDF+17] se consigue probar que $mon\mathcal{P}(^m\ell_\infty) = \ell_{\frac{2m}{m-1},\infty}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $B \subset monH_\infty(B_{\ell_\infty}) \subset \overline{B}$, con

$$B := \left\{ z \in B_{\ell_\infty} : \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\log(n)}} \left(\sum_{k=1}^{n} (z_k^*)^2 \right)^{1/2} < 1 \right\}.$$

En [BDS19] se da una descripción precisa del conjunto de convergencia monomial de $\mathcal{P}(^m\ell_{p,\infty})$ y con esta se acaban las caracterizaciones. En este último artículo también se describen cotas superiores e inferiores de estos conjuntos para $H_\infty(B_{\ell_p})$.

Mientras se discutían las bases de la holomorfía infinito dimensional Harald Bohr encuentra un profundo vínculo entre esta floreciente teoría y la teoría de números durante sus investigaciones en series de Dirichlet. Estas series, bajo algunas condiciones, definen funciones holomorfas en cierto dominio del plano complejo y son de gran interés y utilidad en la teoría de números. Un ejemplo paradigmático de ellas es la función zeta de Riemann. En el año 1913 en [Boh13] Bohr analiza las diferentes regiones en las cuales este tipo de funciones convergen en distintos sentidos. Hace grandes avances en el estudio de estos temas dejando una pregunta sin responder: ¿cuál es el grosor de la brecha entre la región de convergencia absoluta y la región de convergencia uniforme para estas series? Es allí donde tiende un puente entre las series de Dirichlet y las funciones holomorfas en la bola de ℓ_∞ que sería indispensable para que, años más tarde, el interrogante se termine de resolver. Este puente se conoce hoy como la transformada de Bohr y, gracias a la descomposición en numeros primos de los números naturales, pone en correspondencia biunívoca a las series de Dirichlet convergentes y acotadas en $\{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) > 0\}$ y las funciones holomorfas y acotadas sobre la bola de ℓ_∞.

Usando la descomposición de Taylor en polinomios homogéneos para funciones holomorfas en B_{ℓ_∞}, en 1931 Bohnenblust y Hille dan un paso clave en las investigaciones que iniciara Bohr. Inspirados en la desigualdad 4/3 de Littlelwood, logran traducir el problema planteado por Bohr en el estudio de ciertas desigualdades que relacionan la sumabilidad de los coeficientes de polinomios homogéneos con su norma uniforme en la bola de ℓ_∞. Así en [BH31] prueban que para cualquier polinomio m-homogéneo en n variables complejas $P = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} a_\alpha(P) z^\alpha$, vale que

$$\left(\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} |a_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leqslant C_m \sup_{z\in B_{\ell_\infty^n}} |P(z)|, \tag{1}$$

con $C_m > 0$ una constante independiente de la cantidad de variables n. Este resultado les permite determinar el valor de la brecha entre las regiones de convergencia absoluta y uniforme para series de Dirichlet.

Motivado por estas cuestiones en 1914 Bohr plantea otro problema sobre funciones holomorfas en una variable. En [Boh14] se propone encontrar el mayor radio $r > 0$ de forma que para toda función holomorfa en el disco unidad del plano complejo dada por

$f(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k(f)z^k$ valga

$$\sup_{|z|<r} \sum_{k\geqslant 0} |a_k(f)z^k| \leqslant \sup_{|z|<1} \left| \sum_{k\geqslant 0} a_k(f)z^k \right|. \tag{2}$$

Bohr resuelve este problema mostrando que el radio maximal es $1/3$.

En 1989, muchos años después, se retoma este concepto en [DT89], generalizándolo y conectándolo con nociones de la teoría local de espacio de Banach. Comienza un estudio sistemático de lo que se conoce como radio de Bohr n-dimensional. Dada alguna norma sobre $\mathbb{C}^n$, es decir $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_X)$, se estudia la variante del problema de Bohr que proviene de reemplazar al disco unidad por la bola de X. Se busca así el mayor radio $r > 0$ tal que para toda función holomorfa en la bola de X de la forma $f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha(f)z^\alpha$ valga

$$\sup_{\|z\|_X<r} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} |a_\alpha(f)z^\alpha| \leqslant \sup_{\|z\|_X<1} \left| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha(f)z^\alpha \right|.$$

A este radio maximal se lo llama radio de Bohr de la bola de X y se lo nota $K(B_X)$. De este modo podemos decir que el resultado de Bohr se traduce como $K(\mathbb{D}) = 1/3$. Vale mencionar que para la bola de ningún espacio con dimensión más grande que uno se sabe el valor preciso del radio de Bohr. Los avances en este campo están ligados a entender el comportamiento asintótico de este radio para las bolas de ciertos espacios cuando su dimensión tiende a infinito. Muchos esfuerzos se han dedicado a comprender el comportamiento asintótico de $K(B_{\ell_p^n})$, en particular en los artículos [DT89, KB97, Aiz00, Boa00, BB04, Bay12, DP06] se trata el problema de una u otra manera logrando avances parciales en cada uno.

En uno de los artículos más influyentes del área [DFOC$^+$11] se da un paso fundamental, los autores consiguen probar que el radio de Bohr del polidisco n-dimensional tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$K(\mathbb{D}^n) \sim \sqrt{\frac{\log(n)}{n}}.$$

Esto se logra a partir de un estudio minucioso de la desigualdad conseguida por Bohnenblust y Hille dada en (1) (ver también [BPSS14]). En [DF11] los autores consiguen describir el comportamiento asintótico del radio de Bohr para la bola de ℓ_p^n para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$ obteniendo que

$$K(B_{\ell_p^n}) \sim \frac{\log(n)}{n}^{1-\frac{1}{\text{mín}(2,p)}}.$$

Muchas de estas investigaciones relacionan al radio de Bohr de la bola de cierto espacio de Banach X (de dimensión finita) con las constantes de incondicionalidad en los espacios de polinomios homogénos sobre X.

En esta tesis nos proponemos retomar varias de las ideas que nacen de entender las descripciones que pretendía Hilbert de la funciones holomorfas en dimensión infinita, los estudios de Harald Bohr que dieron paso a la las investigaciones entorno del radio que lleva su nombre y la sumabilidad de coeficientes de polinomios homogéneos como aparece en la desigualdad estudiada por Bohnenblust y Hille. Se aborda la íntima relación que hay entre todos estos conceptos con la incondicionalidad en espacios de polinomios homogéneos que es, de alguna forma, la idea que los vincula y está presente en toda la tesis.

Todo esto, de una u otra manera, involucra la sumabilidad de los coeficientes de polinomios homogéneos dependiendo de su norma uniforme. Por esta razón comenzamos comparando las normas uniforme y de coeficientes en espacios de polinomios homogéneos en varias variables complejas. En particular estudiamos el comportamiento asintótico de las constantes de equivalencia entre estas dos normas cuando la cantidad de variables tiende a infinito.

Introducimos novedosas descomposiciones de los monomios de gran utilidad para atacar problemas de incondicionalidad y sumabilidad. Estas descomposiciones permiten un manejo adecuado de la dependencia entre el grado de homogeneidad y la cantidad de variables en ciertas desigualdades. Gracias a esto logramos dar buenas descripciones de los conjuntos de convergencia monomial de varias familias naturales de funciones holomorfas y describir exitosamente el comportamiento asintótico de una generalización del radio de Bohr para todo el espectro de parámetros involucrados. Usamos algunos de estos resultados para dar una descripción acabada del comportamiento asintótico de las constante de incondicionalidad mixta para espacios de polinomios homogéneos.

A continuación damos una descripción de cada capítulo de la tesis.

El Capítulo 1 contiene la notación y resultados previos de las teorías generales necesarias para la exposición de los siguientes capítulos.

En el Capítulo 2 se desarrollan algunas variantes de la desigualdad de Bohnenblust-Hille que se encuentra en (1). Se estudia un problema general de sumabilidad de coeficientes de polinomios m-homogéneos en n variables complejas. Se busca entender, fijados los valores de $1 \leqslant q, p \leqslant \infty$, el comportamiento asintótico de las constantes más pequeñas $A^m_{p,q}(n)$ y $B^m_{q,p}(n)$ de forma que para todo polinomio m-homogéneo en n variables complejas $P = \sum\limits_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} a_\alpha(P) z^\alpha$ vale,

$$\left(\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} |a_\alpha(P)|^q \right)^{1/q} \leqslant A^m_{p,q}(n) \sup_{z\in B_{\ell_p^n}} |P(z)|,$$

$$\sup_{z\in B_{\ell_p^n}} |P(z)| \leqslant B^m_{q,p}(n) \left(\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=m} |a_\alpha(P)|^q \right)^{1/q}.$$

También se presentan otras variantes de este tipo de desiguldades y se introducen los polinomios aleatorios (necesarios a lo largo de toda la tesis). Por último se aplican algunos resultados obtenidos sobre el comportamiento de $A^m_{p,q}(n)$ y $B^m_{q,p}(n)$ obteniendo conclusiones acerca de la interpolación compleja en espacios de polinomios homogéneos y desigualdades de von Neumann en teoría de operadores.

En el Capítulo 3 se definen los conjuntos de convergencia monomial para familias de funciones holomorfas. En la Sección 3.3 se presentan las familias de funciones holomorfas con la propiedad del reordenamiento, una propiedad técnica indispensable en todas las descripciones para conjuntos de convergencia monomial que se dan luego de esta sección. Se prueba que las familias más naturales y estudiadas tienen esta propiedad. Por último se prueba que, para $1 < r \leqslant 2$, $m \geqslant 2$ y $q = (mr')'$ se tiene

$$\ell_q \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_r), \tag{3}$$

respondiendo a una conjetura que aparece de forma explícita en [DMP09].

En el Capítulo 4 se introduce la noción de incondicionalidad mixta en espacios de polinomios. Se muestra que en, un sentido preciso, la incondicionalidad mixta en $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ no depende de la base. Se Presentan algunos resultados que la vinculan con los conjuntos de convergencia monomial para $H_\infty(B_X)$ y $\mathcal{P}(^mX)$. Gracias a estos resultados, a la inclusión obtenida para $mon\mathcal{P}(^m\ell_r)$ en (3), y los resultados obtenidos sobre las constantes $A^m_{p,q}(n)$ y $B^m_{q,p}(n)$ se logra describir el comportamiento asintótico correcto de la constante de incondicionalidad mixta para todo el rango de valores de los que depende.

En el Capítulo 5 se discute el radio de Bohr. Se presenta el radio de Bohr mixto que generaliza al radio de Bohr y se muestra, imitando lo que sucede para el radio de Bohr clásico, que está relacionado con la incondicionalidad mixta en espacios de polinomios. Se caracteriza el comportamiento asintótico del radio de Bohr mixto para todo el rango de valores de los que depende. Para esto se usan herramientas que provienen del estudio de conjuntos de convergencia monomial y se introduce una descomposición monomial novedosa: la *descomposición acotada*. Dicha descomposición se basa en distinguir los monomios en términos del grado máximo de sus variables. Ésta permite manejar ciertas desigualdades con la sutileza técnica necesaria para conseguir el orden asintótico correcto para cierto rango de valores.

En el Capítulo 6 se estudian los conjuntos de convergencia monomial de los espacios $H_b(\ell_r)$ para $1 < r \leqslant 2$ y $H_b(\ell_{r,s})$ para $2 \leqslant r, s \leqslant \infty$. Se presenta la segunda descomposición monomial: la *descomposición de factorización*. A diferencia de otras descomposiciones que aparecen en la literatura, que consisten en una partición del conjunto de monomios, esta técnica permite factorizar cada multi-índice en multi-ínces con una estructura muy específica. Concretamente, consiste en factorizar cada monomio en un producto de uno tetraedral y otro con todas sus variables a una potencia par. A partir de ella se consiguen las siguientes caracterizaciones:

- Para $1 < r \leqslant 2$,

$$monH_b(\ell_r) = \left\{ z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sup_{n \geqslant 1} \frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-\frac{1}{r}}} < \infty \right\}.$$

- Para $2 < r \leqslant \infty$,

$$monH_b(\ell_{r,\infty}) = \left\{ z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sup_{n \geqslant 1} \frac{\left(\sum_{k=1}^n k^{\frac{2}{r}} (z_k^*)^2\right)^{1/2}}{\sqrt{\log(n+1)}} < \infty \right\}.$$

Al mismo tiempo se dan cotas superiores e inferiores bastante ajustadas para $monH_b(\ell_{r,s})$ con $2 \leqslant r \leqslant \infty$ y $2 < s < \infty$.

En el Capítulo 7 se aplican los resultados obtenidos en el Capítulo 6 para conseguir una nueva descripción del conjunto de convergencia monomial de $H_\infty(B_{\ell_r})$ para $1 < r \leqslant 2$. Esta descripción caracteriza la geometría de este conjunto en un sentido muy concreto que se desarrolla en el capítulo y mejora las conocidas hasta el momento.

El Capítulo 8 es el último, en él se retoma el resultado del Capítulo 3 que figura en (3). Gracias a técnicas de interpolación en conos se logra una mejora sustancial de dicho resultado obteniendo para $1 < r \leqslant 2$, $m \geqslant 5$ y $q := (mr')'$ que

$$\ell_{q,\frac{m}{\log(m)}} \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_r) \subset \ell_{q,\infty}.$$

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se establece la notación para el resto de la tesis. También damos las nociones necesarias sobre polinomios y funciones holomorfas en espacios de Banach. Introducimos algunas estructuras algebraicas, topológicas y geométricas que serán claves para entender el resto de los capítulos.

Como es usual $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ denotan los conjuntos de números naturales, enteros, reales y complejos respectivamente. Para referirnos al disco unidad abierto en $\mathbb{C}$ usamos $\mathbb{D}$ y para el conjunto de elementos unimodulares, usualmente llamado el todo unidimensional, $\mathbb{T}$.

Dado $k \in \mathbb{N}$ denotamos con S_k al grupo de todas las permutaciones de k elementos, i.e., las biyecciones de la forma $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$. Para el grupo de permutaciones de $\mathbb{N}$ usamos $S_{\mathbb{N}}$. .

1.1. Espacios de Banach

Usaremos X para nombrar a un espacio de Banach en general y $\|cdot\|_X$ para referirnos a su norma, escribimos $B_X := \{x \in X : \ \|x\|_X < 1\}$ para denotar a su bola. Para hablar de la bola de radio $r > 0$ centrada en $x \in X$ usaremos $B_r(x)$. A lo largo del texto todos los espacios de Banach estarán definidos sobre el cuerpo de los números complejos. Recordemos que un conjunto $U \subset X$ se dice *balanceado* si, para cada $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ el conjunto $\lambda \cdot U := \{\lambda x : x \in U\}$ está contenido en U. Dados X e Y espacios de Banach notaremos al espacio de operadores lineales y acotados de X a Y por $\mathcal{L}(X, Y)$. Fijado un operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ usaremos $\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|_Y$ o simplemente $\|T\|$ para aligerar la notación cuando el contexto permita la vaguedad. Usaremos $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ para denotar al espacio dual de X.

1.1.1. Bases e incondicionalidad

Una sucesión $(b_n)_{n \geqslant 1} \subset X$ es una *base* de X si, para todo $x \in X$ existe una sucesión de escalares $(a_n(x))_{n \geqslant 1} \subset \mathbb{C}$ de forma que $x = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n(x) b_n$. Podemos considerar, para una base $(b_n)_{n\geqslant 1}$, los *funcionales biortogonales*

$$\begin{aligned} b_n^* &: X \to \mathbb{C} \\ x = \sum_{k\geqslant 1} & a_k(x) b_k \mapsto a_n(x). \end{aligned}$$

Siempre que b_n^* sea un funcional continuo para cada $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $(b_n)_{n\geqslant 1}$ será una *Base de Schauder*. La sucesión $(b_n^*)_{n\geqslant 1}$ es llamada *base dual* de $(b_n)_{n\geqslant 1}$ y es una *sucesión básica*, lo que significa que es una base del subespacio que genera, es decir, es base de $\overline{[b_n^* : n \in \mathbb{N}]} \subset X'$. Para los espacios reflexivos la base dual es siempre base del espacio dual.

Dado $1 \leqslant p < \infty$, el conocido espacio de Banach

$$\ell_p := \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\geqslant 1} |z_n|^p < \infty \right\},$$

dotado de la norma $\|z\|_{\ell_p} := \left(\sum_{n\geqslant 1} |z_n|^p\right)^{1/p}$ es un ejemplo de espacio con con base de Schauder. Aquí los vectores canónicos,

$$e_n := (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-ésima posición}}, 0, \ldots) \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

forman la base de Schauder $(e_n)_{n\geqslant 1}$. Notemos que

$$\ell_\infty := \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\geqslant 1} |z_n| < \infty \right\},$$

con la norma usual $\|z\|_\infty = \sup_{n\geqslant 1} |z_n|$, no posee ninguna base de Schauder ya que no es separable. Por otro lado, la base canónica de vectores conforma una base de Schauder para el subespacio cerrado

$$c_0 := \left\{ z \in \ell_\infty : \lim_{n\to\infty} z_n = 0 \right\}.$$

Fijado $1 \leqslant p \leqslant \infty$ escribimos p' para denotar a su *exponente conjugado* (i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). Recordemos que para $1 < p < \infty$ el dual del espacio ℓ_p es $\ell_{p'}$, además vale que $c_0' = \ell_1$ y $\ell_1' = \ell_\infty$. El espacio ℓ_1 es un ejemplo de espacio de Banach con base de Schauder para el cual su dual no soporta una.

Otro concepto muy estudiado en geometría de espacios de Banach es su incondicionalidad. Este concepto será de gran relevancia para la tesis. Dada una sucesión $(x_n)_{n\geqslant 1}$ en un espacio de Banach X, diremos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ *converge incondicionalmente* si $\sum_{n\geqslant 1} x_{\sigma(n)}$ converge, para cada permutación σ of $\mathbb{N}$. Hay muchas definiciones equivalentes para esta noción que pueden encontrarse como *Omnibus Theorem on Unconditionality Summability* en [DJT95, Theorem 1.9]. Aquí necesitaremos sólo algunas de esas equivalencias.

Teorema 1.1.1. *Para una sucesión $(x_n)_{n\geqslant 1}$ en un espacio de Banach X son equivalentes:*

(i) La serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ converge incondicionalmente.

(ii) La serie $\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n x_n$ *converge para cada sucesión* $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$.

(iii) La serie $\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n x_n$ *converge para cada sucesión* $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \in B_{\ell_\infty}$.

Dado X un espacio de Banach con base de Schauder $(x_n)_{n\geqslant 1}$, diremos que es una *base incondicional* de X siempre que, cada serie convergente de la forma $\sum_{n\geqslant 1} a_n x_n$ converja incondicionalmente. Esto significa que la convergencia de la serie que representa a cada elemento del espacio no depende del orden en que los términos aparecen en la suma. Esta es una propiedad cualitativa muy buena y útil para una base. Notemos que, por ejemplo, toda base ortonormal de un espacio de Hilbert es una base incondicional. En particular esto vale para la base de Fourier para $L_2[0,1]$, con el beneficio práctico de que cualquier señal puede ser recuperada por sus componentes armónicos independientemente del orden de adición. Quizás este ejemplo ilustre la importancia de esta noción en muchas ramas del análisis. El siguiente teorema da una manera mas cuantitativa de entender la incondicionalidad (ver [AK06, Theorem 3.1.3]).

Teorema 1.1.2. *Dado un espacio de Banach* X *con base de Schauder* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *los siguientes son equivalentes:*

(i) $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *es una base incondicional para* X.

(ii) Existe una constante $K > 0$ *tal que para todo par de sucesiones* $(a_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{C}$ *y* $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathbb{T}$ *vale*

$$\left\| \sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n a_n x_n \right\|_X \leqslant K \left\| \sum_{n\geqslant 1} a_n x_n \right\|_X . \tag{1.1}$$

Dada una base incondicional $(x_n)_{n\geqslant 1}$ para el espacio de Banach X decimos que es una *base* K*-incondicional* si cumple la desigualdad en (1.1). La constante óptima para esa base en (1.1) se llama constante de incondicionalidad para la base y la notaremos $\chi((x_n)_{n\geqslant 1}; X)$.

La *constante de incondicionalidad* del espacio X se define como

$$\chi(X) := \text{ínf}\, \chi((x_n)_{n\geqslant 1}; X),$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles bases incondicionales $(x_n)_{n\geqslant 1}$ de X.

Observemos que los vectores canónicos forman una base 1-incondicional para c_0 y ℓ_p, con $1 \leqslant p < \infty$. Asimismo toda base ortonormal de un un espacio Hilbert separable es también una base 1-incondicional.

Para espacios de Banach de dimensión finita toda base es incondicional ya que la convergencia está trivialmente garantizada. De todos modos, el Teorema 1.1.2 permite dar un sentido significativo al estudio de la incondicionalidad en el caso de dimensión finita. Será extremadamente útil entender las constantes de incondicionalidad para las bases en espacios de dimensión finita para atacar problemas en espacios de dimensión infinita.

1.1.2. Espacios de Banach de sucesiones

En esta sección introducimos una tipo especial de espacios de Banach. Estos espacios serán esenciales en nuestro estudio de funciones holomorfas ya que permiten una agradable noción de coordenadas.

Para cada par de elementos $x, y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, usaremos la notación

$$x \cdot y := (x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n, \ldots)$$

para referirnos al producto coordenada a coordenada, para referirnos a la sucesión de los módulos de x usaremos

$$|x| := (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|, \ldots).$$

Si $|x_i| \leqslant |y_i|$ para cada $i \in \mathbb{N}$ escribiremos $|x| \leqslant |y|$. Un *espacio de Banach de sucesiones*, o simplemente *espacio de sucesiones*, es un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ cumpliendo las inclusiones $\ell_1 \subset X \subset \ell_\infty$ y de forma que, si $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $y \in X$ con $|x| \leqslant |y|$, entonces $x \in X$ y $\|x\|_X \leqslant \|y\|_X$. Es decir, si un elemento está acotado en norma por otro que pertenece al espacio, eso asegura que el primero está en el espacio también.

Un conjunto no vacío y abierto $\mathcal{R} \subset X$ es llamado *dominio de Reinhardt* si, dados $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ e $y \in \mathcal{R}$ tales que $|x| \leqslant |y|$ entonces $x \in \mathcal{R}$. Dada una sucesión acotada x su *reordenamiento decreciente* x^* está dado por una sucesión definida del siguiente modo,

$$x_n^* = \inf\{\sup_{j \in \mathbb{N}\setminus J} |x_j| : J \subset \mathbb{N}, card(J) < n\}.$$

Un espacio de sucesiones $(X, \|\cdot\|_X)$ se dice *simétrico* si, $x^* \in X$ si y sólo si $x \in X$, y más aún, $\|x\|_X = \|x^*\|_X$. Un conjunto $A \subset X$ es *simétrico* si, $x \in A$ si y sólo si $x^* \in A$.

Proposición 1.1.3. *Para todo $x \in c_0$ existe una función inyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de forma que $x_n^* = |x_{\sigma(n)}|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Diremos que una sucesión $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ es decreciente siempre que $|x|$ lo sea.

Los espacios de Banach ℓ_p con $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y c_0 son espacios de sucesiones. También los, más generales, espacios de Lorentz son buenos ejemplos de espacios de sucesiones. Recordemos su definición. Para $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ el *espacio de Lorentz* $\ell_{p,q}$ se define como

$$\ell_{p,q} := \left\{ z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \|(k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} z_k^*)_{k\geqslant 1}\|_{\ell_q} < \infty \right\}.$$

Dado $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, y fijado $z \in \ell_{p,q}$ definimos

$$\rho_{p,q}(z) := \|(k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} z_k^*)_{k\geqslant 1}\|_{\ell_q} = \begin{cases} \sup\limits_{k\geqslant 1} k^{\frac{1}{p}} |z_k^*| & \text{para } q = \infty, \\ \left(\sum\limits_{k\geqslant 1} k^{-1} |z_k^*|^q \right)^{\frac{1}{q}} & \text{para } q < \infty, p = \infty, \\ \left(\sum\limits_{k\geqslant 1} k^{\frac{q}{p}-1} |z_k^*|^q \right)^{\frac{1}{q}} & \text{para } q, p < \infty. \end{cases}$$

Siempre que $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, $\|z\|_{\ell_{p,q}} := \rho_{p,q}(z)$ define una norma sobre $\ell_{p,q}$ que lo hace un espacio de Banach de suceciones. Observemos que $\ell_{p,p} = \ell_p$ para cada $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Si $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ la función $\rho_{p,q}$ no cumple la desigualdad triangular, aunque es una *quasi-norma completa* en $\ell_{p,q}$, i.e. existe $c > 0$ tale que para todo par de elementos $z, w \in \ell_{p,q}$ vale

$$\rho_{p,q}(z+w) \leqslant c\left(\rho_{p,q}(z) + \rho_{p,q}(w)\right).$$

Notaremos en general $\|\cdot\|_{\ell_{p,q}} = \rho_{p,q}(\cdot)$ aún en los casos en los que no sea una norma. Este problema puede ser arreglado considerando a estos espacios dotados de la norma dada, para $z \in \ell_{p.q}$, por

$$\|z\|_{\ell_{(p,q)}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{q}{p}-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k^*\right)^q\right)^{1/q}.$$

Para $1 < p, q \leqslant \infty$ y $z \in \ell_{p,q}$, se tiene que

$$\rho_{p,q}(z) \leqslant \|z\|_{\ell_{(p,q)}} \leqslant p' \rho_{p,q}(z), \tag{1.2}$$

luego, siempre podremos trabajar con la quasi-norma $\rho_{p,q}(\cdot)$ y tratar a $(\ell_{p,q}, \rho_{p,q}(\cdot))$ como un espacio de Banach de sucesiones si estamos dispuestos a pagar p' como precio en nuestras cotas siempre que lo hagamos (ver [BS88, Lemma 4.5]). Además necesitaremos un resultado al respecto de los duales de los espacios de Lorentz, que es una adaptación al caso que necesitamos de [BS88, Corollary 4.8].

Teorema 1.1.4. *Para $1 < p < \infty$ y $1 \leqslant q < \infty$ el espacio dual $(\ell_{p,q})'$ es isomorfo al espacio $\ell_{p',q'}$.*

Una última familia particular de espacios de sucesiones que necesitaremos más adelante será la de espacios de Marcinkiewicz. Sea $\Psi = (\Psi(n))_{n=0}^{\infty}$ una sucesión creciente de números reales no negativos con $\Psi(0) = 0$ y $\Psi(n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Estas funciones son usualmente conocidas como símbolos. El *espacio de sucesiones de Marcinkiewicz* asociado al símbolo Ψ, denotado por m_Ψ, es el espacio vectorial de todas las sucesiones acotadas $(z_n)_n$ tales que

$$\|z\|_{m_\Psi} := \sup_{n \geqslant 1} \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k^*}{\Psi(n)} < \infty.$$

Para un espacio de sucesiones X y n un número natural consideramos la *proyección n-ésima*

$$\begin{aligned} \pi_n : X &\to \mathbb{C}^n \\ (x_1, \ldots, x_n, \ldots) &\mapsto (x_1, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{1.3}$$

y la *inclusión n-ésima*

$$\begin{aligned} \iota_n : \mathbb{C}^n &\to X \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Denotamos por X_n a $\mathbb{C}^n$ dotado de la *norma cociente* inducida por ι_n, i.e.

$$\|(z_1, \dots, z_n)\|_{X_n} := \text{ínf}\{\|x\|_X : \iota_n(x) = (z_1, \dots, z_n)\}.$$

Observemos que esta construcción hace de $\pi_n : X \to X_n$ y $\iota_n : X_n \to X$ operadores de norma uno. En ocasiones será útil identificar a X_n con $i_n(X_n) \subset X$. Un importante ejemplo es $\ell_p^n := (\ell_p)_n$, esto es, el espacio de Banach dado por todas las n-tuplas $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ dotado con la norma $\|(z_1, \dots, z_n)\|_p = \Big(\sum_{i=1}^n |z_i|^p\Big)^{1/p}$ si $1 \leqslant p < \infty$, y $\|(z_1, \dots, z_n)\|_\infty = \text{máx}_{i=1,\dots,n} |z_i|$ para $p = \infty$. También consideraremos $\ell_{p,q}^n := (\ell_{p,q})_n$ con $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

1.2. Polinomios homogéneos y operadores multilineales.

Dados $X_1, \dots X_m, Y$ espacios de Banach un *operador multilineal* o *forma multilineal* de $X_1 \times \cdots \times X_m$ en Y es una función $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ que es lineal en cada coordenada. También llamamos a una función así un operador m-lineal, siendo más específicos. El conjunto de los operadores m-lineales de $X_1 \times \cdots \times X_m$ en Y es un espacio vectorial con la suma y el producto escalar de funciones que se definen como es usual aprovechando la estructura de espacio vectorial de Y. Recordemos que un operador multilineal $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ es acotado o continuo cuando

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X_1,\dots,X_n;Y)} := \sup\{\|T(x_1, \dots, x_m)\|_Y : x_1 \in B_{X_1}, \dots, x_m \in B_{X_m}\} < \infty.$$

El conjunto de todos los operadores m-lineales y acotados de $X_1 \times \cdots \times X_m$ en Y equipado con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;Y)}$ es un espacio de Banach, el cual denotamos $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$. Cuando $Y = \mathbb{C}$ simplemente usamos $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_m)$, y si $X = X_1 = \cdots X_m$ denotamos $\mathcal{L}(^m X; Y)$ a este espacio.

Siempre que tengamos espacios de Banach $W_1, \dots W_m, X_1 \dots, X_m$ y operadores lineales y acotados entre ellos $u_i \in \mathcal{L}(W_i, X_i)$, podemos considerar la aplicación siguiente

$$\begin{aligned}(u_1, \dots, u_m) : W_1 \times \cdots \times W_m &\to X_1 \times \cdots \times X_m \\ (w_1, \dots, w_m) &\mapsto (u_1(w_1), \dots, u_m(w_m)).\end{aligned}$$

Dado un operador multilineal y acotado $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ la aplicación anterior induce otro $T \circ (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{L}(W_1, \dots W_n; Y)$. La siguiente proposición dice que efectivamente el operador inducido es acotado y como se acota su norma en función de las normas de T y los operadores $u_1, \dots, u_m$.

Proposición 1.2.1. *Sean $W_1, \dots W_m, X_1 \dots, X_m, Y, Z$ espacios de Banach. Dados $u_i \in \mathcal{L}(W_i, X_i)$ para cada $1 \leqslant i \leqslant m$, $v \in \mathcal{L}(Y, Z)$ y $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_m; Y)$ se tiene que $v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{L}(W_1, \dots W_m; Z)$ y además*

$$\begin{aligned}&\|v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m)\|_{\mathcal{L}(W_1,\dots W_m;Z)} \leqslant \\ &\quad \leqslant \|v\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \|T\|_{\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;Y)} \|u_1\|_{\mathcal{L}(W_1,X_1)} \cdots \|u_m\|_{\mathcal{L}(W_m,X_m)}.\end{aligned}$$

Dado un par de espacios de Banach X, Y y $T \in \mathcal{L}(^m X; Y)$ la aplicación

$$\begin{aligned} P : X &\to Y \\ x &\mapsto T(x, \dots, x), \end{aligned}$$

es un *polinomio m-homogéneo* de X en Y. Diremos que P es acotado o continuo si su *norma uniforme*

$$\|P\|_{\mathcal{P}(^m X;Y)} := \sup_{x \in B_X} \|P(x)\|_Y,$$

es finita. En otra palabras, si consideramos la *inclusión diagonal*

$$\begin{aligned} \Delta_m : X &\to X^m \\ x &\mapsto (x, \dots, x), \end{aligned}$$

un polinomio m-homogéneo es una función $P = T \circ \Delta_m$ para cierto operador m-lineal acotado $T \in \mathcal{L}(^m X; Y)$.

Observemos que para todo polinomio m-homogéneo P definido a través de $T \in \mathcal{L}(^m X; Y)$ vale que

$$\|P\|_{\mathcal{P}(^m X;Y)} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(^m X;Y)}. \tag{1.5}$$

El conjunto de todos los polinomios m-homogéneos y acotados de X en Y provisto de la norma $\| \cdot \|_{\mathcal{P}(^m X;Y)}$ es un espacio de Banach al que denotamos $\mathcal{P}(^m X; Y)$. Cuando $Y = \mathbb{C}$ directamente usamos $\mathcal{P}(^m X)$ para referirnos a $\mathcal{P}(^m X; \mathbb{C})$. Para un polinomio m-homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ existe siempre una aplicación multilineal $T \in \mathcal{L}(^m X; Y)$ de modo que $P = T \circ \Delta_m$. Decimos que T is un operador m-lineal asociado a P.

Para una aplicación general $g : U \to Y$, donde Y es un espacio de Banach, y dado cierto subconjunto $V \subset U$ la siguiente notación será de utilidad

$$\|g\|_V := \sup_{v \in V} \|g(v)\|_Y.$$

Observemos que, para un polinomio m-homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$, usando esta notación para la bola de X tenemos que $\|P\|_{B_X} = \|P\|_{\mathcal{P}(^m X;Y)}$. Una propiedad simple pero central de los polinomios m-homogéneos es, como su nombre lo sugiere, su *homogeneidad*. Esto es, dados $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in X$ y $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$, se sigue que

$$P(\lambda x) = \lambda^m P(x).$$

Los polinomios homogéneos sobre espacios de Banach tienen la bonita y muy importante *propiedad de ideal.*

Proposición 1.2.2. *Sean W, X, Y, Z espacios de Banach. Para $u \in \mathcal{L}(W, X)$, $v \in \mathcal{L}(Y, Z)$ y $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ se tiene que $v \circ P \circ u \in \mathcal{P}(^m W; Z)$ y*

$$\|v \circ P \circ u\|_{\mathcal{P}(^m W;Z)} \leqslant \|v\|_{\mathcal{L}(Y,Z)} \|P\|_{\mathcal{P}(^m X;Y)} \|u\|^m_{\mathcal{L}(W,X)}.$$

En particular, para espacios de sucesiones tenemos el siguiente corolario que es extremadamente útil.

Corolario 1.2.3. *Dado un espacio de Banach X y un polinomio homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m X)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que $P_n := P \circ \pi_n \in \mathcal{P}(^m X_n)$ y $\|P_n\|_{\mathcal{P}(^m X_n)} \leqslant \|P\|_{\mathcal{P}(^m X)}$.*

Con esto en mente, aunque nuestro principal interés este puesto en los espacios de polinomios continuos en espacios de dimensión infinita, será de gran utilidad estudiar sus versiones finito-dimensionales.

Un polinomio m-homogéneo en n variables complejas es una función $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ de la forma

$$P(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} a_\alpha z^\alpha,$$

donde $\Lambda(m,n) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m\}$, $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$ y $a_\alpha \in \mathbb{C}$.

Otra forma de escribir un polinomio P es la siguiente:

$$P(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} c_\mathbf{j} z_\mathbf{j},$$

donde $\mathcal{J}(m,n) := \{\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathbb{N}^m : 1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_m \leqslant n\}$, $z_\mathbf{j} := z_{j_1} \cdots z_{j_m}$ y $c_\mathbf{j} \in \mathbb{C}$. Estas dos maneras de indexar los coeficientes de un polinomio homogéneo en finitas variables están relacionas por la biyección

$$\begin{aligned} F : \Lambda(m,n) &\to \mathcal{J}(m,n) \\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &\mapsto \mathbf{j} = (1, \overset{\alpha_1}{\ldots}, 1, \ldots, n, \overset{\alpha_m}{\ldots}, n). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Notemos que $c_\mathbf{j} = a_\alpha$ con $\mathbf{j} = F(\alpha)$. Cuando $\mathbf{j} = F(\alpha)$ diremos que $\alpha = \alpha(\mathbf{j})$ es asociado a $\mathbf{j}$ y viceversa, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\alpha)$ asociado a α. Usaremos el hecho de que el cardinal de este conjunto de índices es

$$|\mathcal{J}(m,n)| = |\Lambda(m,n)| = \binom{m+n-1}{m}. \tag{1.7}$$

Nos referimos a los elementos $(z^\alpha)_{\alpha \in \Lambda(m,n)}$ (equivalentemente, $(z_\mathbf{j})_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)}$) como los *monomios*. Notemos que $P \in \mathcal{P}(^m \mathbb{C}^n)$ define una única sucesión de coeficientes que puede ser escrita en dos maneras como $(a_\alpha(P))_{\alpha \in \Lambda(m,n)}$ y $(c_\mathbf{j}(P))_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)}$ de modo que

$$P(z) = \sum_{\alpha \in \Lambda} a_\alpha(P) z^\alpha = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} c_\mathbf{j}(P) z_\mathbf{j}.$$

La relación entre los coeficientes de estas dos formas de escribir a un polinomio P está dada por $a_\alpha(P) = c_\mathbf{j}(P)$ siempre que $F(\alpha) = \mathbf{j}$.

Otro conjunto de índices muy útil, especialmente explotando la conexión entre polinomios homogéneos y operadores multilineales, será $\{1, \ldots, n\}^m$, el cual abreviaremos como $\mathcal{M}(m,n)$. Dado $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$ puede haber muchos índices $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathcal{M}(m,n)$ tal que para alguna permutación $\sigma \in S_m$ se consiga $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{i}) := (i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(m)})$. Para cada $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$ consideramos la clase de equivalencia

$$[\mathbf{j}] := \{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n) : \mathbf{j} = \sigma(\mathbf{j}) \text{ con } \sigma \in S_m\},$$

y mediante $|[\mathbf{j}]|$ denotamos el cardinal de $[\mathbf{j}]$. Observemos que para cada $\mathbf{i} \in [\mathbf{j}]$ con $\sigma \in S_m$ de forma que $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{i})$ tenemos $z_{\mathbf{j}} = z_{\mathbf{i}} = (z_{\sigma(1)}, \ldots, z_{\sigma(n)})_{\mathbf{j}}$. Dado $\alpha \in \Lambda(m, n)$, podemos calcular su cardinal como $|[\alpha]| := \frac{m!}{\alpha!}$ donde $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Si $F(\alpha) = \mathbf{j}$ se sigue que $|[\mathbf{j}]| = |[\alpha]|$.

En el estudio de algunos espacios de polinomio homogéneos sobre espacios de sucesiones de dimensión infinita será de mucha utilidad considerar los conjuntos

$$\mathcal{J}(m) := \bigcup_{n \geqslant 1} \mathcal{J}(m, n) = \{\mathbf{j} = (j_1, \ldots, \mathbf{j}_m) \in \mathbb{N}^m : 1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_m\},$$

y

$$\Lambda(m) := \bigcup_{n \geqslant 1} \Lambda(m, n) = \left\{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} : |\alpha| = m\right\}.$$

La siguiente es una descripción de los polinomios homogéneos en espacios de sucesiones dependiendo de sus proyecciones de dimensión finita.

Observación 1.2.4. Sea X un espacio de sucesiones, cada $P \in \mathcal{P}(^m X)$ define dos únicas sucesiones de coeficientes $(a_\alpha(P))_{\alpha \in \Lambda(m)}$ y $(c_{\mathbf{j}}(P))_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m)}$ de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}^n$ se tiene

$$P_n(z) = \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} a_\alpha(P) z^\alpha = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}.$$

Demostración. Dados un espacio de sucesiones X y un polinomio homogéneo y continuo $P \in \mathcal{P}(^m X)$, gracias al Corolario 1.2.3, podemos considerar su proyección de dimensión finita $(P_n)_{n \geqslant 1}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ el polinomio P_n define el par único de sucesiones $(a_\alpha(P_n))_{\Lambda(m,n)}$ y $(c_{\mathbf{j}}(P_n))_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)}$. Notemos que dados dos números naturales $n < N$ tenemos $P_N \circ \pi_n = P_n$, lo cual implica $(a_\alpha(P_N))_{\Lambda(m,n)} = (a_\alpha(P_n))_{\Lambda(m,n)}$ y $(c_{\mathbf{j}}(P_N))_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} = (c_{\mathbf{j}}(P_n))_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)}$. Esto dice que la dependencia en n de la sucesión de coeficientes de P_n es ilusoria. Luego podemos escribir $(a_\alpha(P_n))_{\Lambda(m,n)} = (a_\alpha(P))_{\Lambda(m,n)}$ y $(c_{\mathbf{j}}(P_n))_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} = (c_{\mathbf{j}}(P))_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)}$. Finalmente, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, dado $z \in \mathbb{C}^n$ tenemos

$$P_n(z) = \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} a_\alpha(P) z^\alpha = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}},$$

como queríamos. $\square$

1.2.1. Operadores multilineales simétricos

La conexión entre polinomios homogéneos en espacios de Banach y formas multilineales es clara y profunda. De hecho, para cada polinomio homogéneo debe haber un operador multilineal detrás pero, puede que más de un operador multilineal defina el mismo polinomio. Por ejemplo, el polinomio

$$\begin{aligned} P : \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C} \\ (z_1, z_2) &\mapsto z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2, \end{aligned}$$

puede definirse a través de dos formas bilineales diferentes $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(^2\mathbb{C}^2)$ donde

$$\begin{aligned}
T_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) &= x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_2,\\
T_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) &= x_1y_1 + x_1y_2 + y_1x_2 + x_2y_2.
\end{aligned}$$

Diremos que un operador multilineal $T \in \mathcal{L}(^mX;Y)$ es simétrico si, dada una permutación $\sigma \in S_m$ y cualquier m-tupla $(x_1,\ldots,x_m) \in X^m$ se tiene

$$T_\sigma(x_1,\ldots,x_m) := T(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}) = T(x_1,\ldots,x_m).$$

Notemos que para cualquier permutación $\sigma \in S_m$ vale que

$$\|T_\sigma\|_{\mathcal{L}(^mX;Y)} = \|T\|_{\mathcal{L}(^mX;Y)}. \tag{1.8}$$

Dada cualquier forma multilineal $T \in \mathcal{L}(^mX;Y)$ consideramos su simetrización $T^s \in \mathcal{L}(^mX;Y)$ dada por

$$\begin{aligned}
T^s : X^m &\to Y\\
(x_1,\ldots,x_m) &\mapsto \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} T_\sigma(x_1,\ldots,x_m),
\end{aligned}$$

la cual es nuevamente una forma m-linear pero en este caso simétrica. Más aún podemos definir el operador de simetrización

$$\begin{aligned}
\pi_s : \mathcal{L}(^mX;Y) &\to \mathcal{L}(^mX;Y)\\
T &\mapsto T^s.
\end{aligned}$$

Para cualquier forma simétrica $T \in \mathcal{L}(^mX;Y)$, vale que $T = T_\sigma$ para cada $\sigma \in S_m$ y $\operatorname{card}(S_m) = m!$ tenemos

$$T^s = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} T_\sigma = T.$$

Además dado $T \in \mathcal{L}(^mX;Y)$ y gracias a la ecuación (1.8), se sigue que

$$\begin{aligned}
\|\pi_s(T)\|_{\mathcal{L}(^mX;Y)} &= \|\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} T_\sigma\|_{\mathcal{L}(^mX;Y)}\\
&\leqslant \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} \|T_\sigma\|_{\mathcal{L}(^mX;Y)}\\
&= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} \|T\|_{\mathcal{L}(^mX;Y)} = \|T\|_{\mathcal{L}(^mX;Y)}.
\end{aligned}$$

Usando la observación anterior resulta que π_s es una proyección. Llamamos al espacio dado por la imagen de esta proyección el espacio de operadores m-lineales simétricos y lo denotamos $\mathcal{L}^s(^mX;Y) := \pi_s(\mathcal{L}(^mX;Y))$.

Podemos definir el siguiente operador suryectivo

$$\begin{aligned} \widehat{\ }\colon \mathcal{L}^s({}^mX;Y) &\to \mathcal{P}({}^mX;Y) \\ T &\mapsto \widehat{T} := T \circ \Delta_m. \end{aligned}$$

Dado $P \in \mathcal{P}({}^mX;Y)$ la *fórmula de polarización* da un único operador multilineal y simétrico asociado a P. Fijados $(x_1,\ldots,x_m) \in X^m$ esta fórmula aplicada a P esta dada por

$$\check{P}(x_1,\ldots,x_m) := \frac{1}{2^m m!}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\varepsilon_i=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_m P(\varepsilon_1 x_1+\cdots+\varepsilon_m x_m).$$

Observación 1.2.5. Para un polinomio homogéneo $P \in \mathcal{P}({}^m\mathbb{C}^n)$ y dados los multi-índices $\alpha \in \Lambda(m,n)$, $F(\alpha) = \mathbf{j} \in \mathcal{J}(m.n)$ y $\mathbf{i} = (i_1,\ldots,i_m) \in [\mathbf{j}]$ se tiene que

$$a_\alpha(P) = c_{\mathbf{j}}(P) = \check{P}(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|[\mathbf{j}]|,$$

Demostración. Dado $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m.n)$ y $\mathbf{i} \in [\mathbf{j}]$ existe alguna permutación $\sigma \in S_m$ tal que $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{i})$. Cómo $\check{P}$ es una forma simétrica se sigue que

$$\check{P}(e_{j_1},\ldots,e_{j_m}) = \check{P}_\sigma(e_{j_1},\ldots,e_{j_m}) = \check{P}(e_{i_1},\ldots,e_{i_m}). \tag{1.9}$$

Notemos que $\mathcal{M}(m,n) = \bigcup_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}[\mathbf{j}]$ es una partición. Dado $z \in \mathbb{C}^n$, usando la ecuación (1.9), tenemos que

$$\begin{aligned} P(z) = \check{P}(z,\ldots,z) &= \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \check{P}(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})z_{\mathbf{i}} \\ &= \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\sum_{\mathbf{i}\in[\mathbf{j}]}\check{P}(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})z_{\mathbf{j}} = \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}|[\mathbf{j}]|\check{P}(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})z_{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

gracias a la unicidad de los coeficientes de P tenemos lo que que queríamos probar. □

La fórmula de polarización dada en (1.2.1) define el operador lineal

$$\begin{aligned} \check{\ }\colon \mathcal{P}({}^mX;Y) &\to \mathcal{L}^s({}^mX;Y) \\ P &\mapsto \check{P}. \end{aligned}$$

El siguiente teorema afirma que ambos operadores, $\widehat{\cdot}$ y $\check{\cdot}$, resultan isomorfismos de espacios de Banach entre $\mathcal{L}^s({}^mX;Y)$ y $\mathcal{P}({}^mX;Y)$, siendo además uno inverso del otro. En particular para cada polinomio homogéneo hay una única forma multilineal simétrica asociada a este.

Teorema 1.2.6 (Proposición 1.8 en [Din99]). *Dado un operador multilineal simétrico $T \in \mathcal{L}^s({}^mX;Y)$ y $P = T \circ \Delta_m$, entonces $T = \check{P}$ y*

$$\|P\|_{\mathcal{P}({}^mX;Y)} \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}({}^mX;Y)} \leqslant \frac{m^m}{m!}\|P\|_{\mathcal{P}({}^mX;Y)}.$$

El siguiente resultado compara la norma de un polinomio homogéneo con la norma de su forma multilineal simétrica asociada dadas algunas restricciones precisas en los elementos en los que se evalúa.

Teorema 1.2.7 (Theorem 1 in [Har72]). *Drado un polinomio homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ y su forma multilineal simétrica asociada $\check{P} \in \mathcal{L}^s(^m X; Y)$, para cualquier $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ se tiene*

$$\sup_{u,v \in B_X} \|\check{P}(\underbrace{u, \ldots, u}_{m-k}, \overbrace{v, \ldots, v}^{k})\|_Y \leqslant \frac{(m-k)!k!m^m}{(m-k)^{m-k}k^k m!}\|P\|_{\mathcal{P}(^m X;Y)}$$

1.3. Funciones holomorfas

Ahora centraremos nuestra atención en uno de los temas principales de la tesis, las funciones holomorfas sobre espacios de Banach. Las definiremos, discutiremos algunas de sus propiedades más importantes y su conexión con los polinomios sobre espacios de Banach.

Dados dos espacio de Banach sobre el cuerpo de los complejo X e Y y un conjunto abierto $U \subset X$ decimos que una función $f : U \to Y$ es *Gâteaux-holomorfa* si, dada una tripleta $\xi \in U, \eta \in X, \phi \in Y'$, la función de una variable compleja

$$\lambda \to \phi \circ f(\xi + \lambda\eta),$$

está definida y es holomorfa en algún vecindario de 0 (en el sentido tradicional para una función de una variable compleja). Si $f : U \to Y$ es Gâteaux-holomorfa y continua diremos directamente que es *holomorfa*. Cómo en el caso unidimensional llamaremos *entera* a toda función holomorfa en todo el espacio X.. Para denotar al espacio de todas las funciones holomorfas sobre algún abierto $U \subset X$ a valores en Y usamos $H(U; Y)$ (o $H(U)$ si $Y = \mathbb{C}$). El conjunto $H(U; Y)$ es, de hecho, un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

El siguiente teorema condensa tres maneras de entender a las funciones holomorfas sobre espacios de Banach. Para una demostración de este hecho y una visión profunda de la teoría de funciones holomorfas en espacios de Banach recomendamos [Din99] y [Muj10].

Teorema 1.3.1. *Dados dos $\mathbb{C}$-espacios de Banach X e Y, un conjunto abierto $U \subset X$ y una función $f : U \to Y$ son equivalentes:*

- *f es holomorfa.*
- *f es* Fréchet diferenciable *para cada $x_0 \in U$, i.e., existe $df(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - df(x)(h)}{\|h\|_X} = 0.$$

- *Para cada $x_0 \in U$ existe $r = r(x_0) > 0$ de forma que, en $B_r(x_0)$, la serie de Taylor de f converge uniformemente, i.e., hay polinomios homogéneos $\frac{d^m f(x_0)}{m!} \in \mathcal{P}(^m X, Y)$ de manera que*

$$f(x) = \sum_{m \geqslant 1} \frac{d^m f(x_0)}{m!}(x - x_0) + f(x_0),$$

para cada $x \in B_r(x_0)$.

Dada una función holomrfa $f : U \to Y$ y un punto $x_0 \in U$, también usaremos $P_m(f)(x_0) = \frac{d^m f(x_0)}{m!}$ (o simplemente $P_m(f)$ cuando el punto x_0 este claramente determinado) para llamar a la parte m-homogénea en la expansión de Taylor.

De la tercera equivalencia en el Teorema 1.3.1 se hace clara una profunda conexión las funciones holomorfas y los polinomios homogéneos en espacios de Banach. Explotaremos esta relación a lo largo de todo el texto. En este sentido, una herramienta fundamental al trabajar con funciones holomorfas será (al igual que en el caso unidimensional) la *fórmula integral de Cauchy*. En este caso esta fórmula enuncia que, para cierta función holomorfa $f \in H(U;Y)$, un punto $z \in U \subset X$ y otro $x \in X$, vale que

$$\frac{d^m f(z)}{m!}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} \frac{f(z+\lambda x)}{\lambda^{m+1}} d\lambda, \tag{1.10}$$

para cada $m \in \mathbb{N}_0$, dónde $r > 0$ es una radio tal que $z + \lambda x \in U$ para todo $|\lambda| \leqslant r$.

Hay muchas familias de funciones holomorfas consideradas en la literatura, aquí presentamos aquellas que estudiaremos a lo larde de la tesis. El primer ejemplo es una familia ya conocida, dados dos espacios de Banach complejos X e Y, para todo $m \in \mathbb{N}$ consideramos la familia de polinomios m-homogéneos $\mathcal{P}(^m X;Y)$. El hecho de que efectivamente sea un subconjunto del conjunto de funciones holomorfas de X en Y, i.e.,

$$\mathcal{P}(^m X;Y) \subset H(X;Y),$$

es claro gracias al Teorema 1.3.1.

Para todo conjunto acotado $U \subset X$ usamos $H_\infty(U;Y)$ para denotar al subconjunto de $H(U;Y)$ dado por la funciones holomorfas y acotadas de U en Y. La norma dada por

$$\|f\|_{H_\infty(U;Y)} := \|f\|_U = \sup_{z \in U} \|f(z)\|_Y,$$

hace de $\Big(H_\infty(U;Y), \|\cdot\|_{H_\infty(U;Y)}\Big)$ un espacio de Banach. Estaremos espacialmente interesados en $H_\infty(B_X;Y)$, en particular para $Y = \mathbb{C}$, en este caso usamos la notación $H_\infty(B_X) := H_\infty(B_X;\mathbb{C})$. El siguiente lema implica, para todo $m \in \mathbb{N}_0$, que la proyección

$$\begin{aligned} H_\infty(B_X;Y) &\to \mathcal{P}(^m X;Y) \\ f &\to \frac{d^m f(0)}{m!}, \end{aligned}$$

es una contracción.

Lema 1.3.2. *Dados dos espacios de Banach complejos X, Y y un abierto balanceado $U \subset X$ se sigue que*

$$\left\| \frac{d^m f(0)}{m!} \right\|_U \leqslant \|f\|_U,$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$

La idea de la demostración del Lema 1.3.2 es esencialmente usar la fórmula integral de Cauchy (1.10).

Finalmente consideramos el conjunto $H_b(X;Y) \subset H(H;Y)$ dado por las funciones enteras de tipo acotado, i.e., el conjunto de todas las funciones enteras sobre X a valores en Y que resultan acotadas en los conjuntos acotados de X. Este conjunto tiene estructura de espacio vectorial. Más aún, para $f \in H_B(X;Y)$ y cualquier natural n, $q_n(f) := \|f\|_{nB_X}$ define una seminorma. El espacio $H_b(X;Y)$ es un espacio de Fréchet considerando la familia de seminormas $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Una función f es entera de tipo acotado si y sólo si

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \frac{d^m f(0)}{m!} \right\|_{B_X}^{1/m} = 0, \tag{1.11}$$

(see [Muj10, Corollary 7.4]) y, para todo $r > 0$, $p_r(f) := \sum_{m\geqslant 0} r^m \left\| \frac{d^m f(0)}{m!} \right\|_{B_X}$ es también una seminorma en $H_b(X;Y)$. La familia de seminormas $\{p_r : r > 0\}$ da para $H_b(X;Y)$ la misma estructura de espacio de Fréchet. Cuando tengamos $Y = \mathbb{C}$ escribiremos directamente $H_b(X)$ para referirnos a este espacios.

En el caso de dimensión finita, una función compleja es holomorfa en un conjunto abierto si y solo si es analítica allí, i.e., tiene localmente una expansión en serie de Taylor dada por los monomios.

Teorema 1.3.3. *Dado un conjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ una función $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa en U si y solo si es analítica en U. En este caso, dado $z \in U$, existen $r_1, \dots, r_n > 0$ (dependiendo de z) tales que*

$$f(w) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha(f)(z)(w-z)^\alpha.$$

para todo $w \in z + (r_1, \dots, r_n) \cdot \mathbb{D}^n$. Además sus coeficientes pueden ser calculados mediantes la fórmula

$$a_\alpha(f)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_1 - z_1| = \rho_1} \cdots \int_{|\xi_n - z_n| = \rho_n} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)^{\alpha_1+1} \cdots (\xi_n - z_n)^{\alpha_n+1}} d\xi. \tag{1.12}$$

1.4. Interpolación compleja

El método de interpolación compleja desarrollado por Calderón es una herramienta sumamente útil en el estudio de operadores acotados entre espacios de Banach y, en general, desigualdades en estos espacios. Este método permite obtener información sobre operadores lineales entre una familia de estos espacios conociendo cómo estos operadores se comportan en los espacios extremales en la familia.

Diremos que dos espacios de Banach X, Y forman un par de interpolación si existe cierto espacio vectorial topológico de Hausdorff Λ y un operador continuo e inyectivo

$$i_X : X \hookrightarrow \Lambda, \ \text{ y } \ i_Y : Y \hookrightarrow \Lambda.$$

Cuando (X,Y) sea una *pareja de interpolación* consideraremos el espacio de Banach dado por su suma

$$X+Y := \Big\{ i_X(x)+i_Y(y) : x\in X, y\in Y \Big\}$$

dotado de la norma

$$\|u\|_{X+Y} := \text{ínf}\Big\{ \|x\|_X + \|y\|_Y : x\in X, y\in Y, u = i_X(x)+i_Y(y) \Big\};$$

y el espacio de Banach dado por su intersección

$$X\cap Y := i_X(X)\cap i_Y(Y),$$

con la norma $\|u\|_{X\cap Y} := \text{máx}\Big\{ \|i_X^{-1}(u)\|_X, \|i_Y^{-1}(u)\|_Y \Big\}$.

La inclusión

$$\begin{aligned} \iota : X\cap Y &\hookrightarrow X+Y, \\ u &\mapsto u, \end{aligned}$$

es una isometría, esto permite definir el concepto de *espacio intermedio* E para una pareja de interpolación (X,Y) como cualquier espacio de Banach tal que $X\cap Y\subset E\subset X+Y$ como espacios de Banach (i.e., $\|u\|_{X+Y}\leqslant \|u\|_E \leqslant \|u\|_{X\cap Y}$). Un espacio de interpolación entre X e Y es un espacio intermedio E tal que, dado un operador lineal y acotado $T\in\mathcal{L}(X+Y)$ de forma que $T|_X\in\mathcal{L}(X)$ y $T|_Y\in\mathcal{L}(Y)$, vale que $T|_E\in\mathcal{L}(E)$.

Para definir el método de interpolación compleja será necesario considerar la banda compleja $B := \{z = a+bi : 0 < a < 1\}$. Sea (X,Y) una pareja de interpolación, diremos que una función $f:\overline{B}\to X+Y$ cumple la condición $(*)$ si

1. f es contínua en $\overline{B}$;
2. f es holomorfa en B;
3. $t\mapsto f(it)$ es continua y acotada de $\mathbb{R}$ en X, $t\mapsto f(1+it)$ es continua y acotada de $\mathbb{R}$ en Y.

Consideremos el espacio de Banach dado por las funciones complejas que realizan la condición $(*)$, i.e.,

$$\mathcal{F}(X,Y) := \Big\{ f:\overline{B}\to X+Y : \text{ cumpliendo la condición } (*) \Big\},$$

dotado de la norma dada por $\|f\|_{\mathcal{F}(X,Y)} := \text{máx}\{\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(it)\|_X, \sup_{t\in\mathbb{R}}\|f(1+it)\|_X\}$.

Dado $0<\theta<1$ consideramos

$$\mathcal{N}_\theta(X,Y) = \Big\{ f\in\mathcal{F}(X,Y) : f(\theta)=0 \Big\},$$

el cual es un subespacio cerrado de $\mathcal{F}(X,Y)$. El espacio intermedio dado por el método de interpolación compleja en θ está dado por

$$[X,Y]_\theta := \frac{\mathcal{F}(X,Y)}{\mathcal{N}_\theta(X,Y)},$$

dotado de la norma cociente.

Dado $1 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$ un resultado clásico de Riesz y Thorin implica que para cada $0 < \theta < 1$ se tiene

$$[Lp_0(U,\mu), L_{p_1}(U,\mu)]_\theta = L_p(\mu), \tag{1.13}$$

isométricamente, donde $\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ para todo (U,μ) espacio de medida.

Teorema 1.4.1 (Teorema de interpolación multilineal)**.** *Dados $m \in \mathbb{N}$, las parejas de interpolación $(X_0^1, X_1^1), \ldots, (X_0^m, X_1^m)(Y_0, Y_1)$ y $T \in \mathcal{L}(X_0^1, \ldots, X_0^m; Y_0) \cap \mathcal{L}(X_1^1, \ldots, X_1^m; Y_1)$ un operador multilineal. Entonces para todo $\theta \in (0,1)$ se tiene que*

$$T \in \mathcal{L}([X_0^1, X_1^1]_\theta, \ldots, [X_0^m, X_1^m]_\theta; [Y_0, Y_1]_\theta)$$

y vale la siguiente cota para su norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}([X_0^1,X_1^1]_\theta,\ldots,[X_0^m,X_1^m]_\theta;[Y_0,Y_1]_\theta)} \leqslant \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(X_0^1,\ldots,X_0^m;Y_0)} \|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(X_1^1,\ldots,X_1^m;Y_1)}.$$

1.5. Dirichlet series

Para entender los resultados de la tesis esta sección no es necesaria. De todos modos si lo es para comprender más en profundidad su motivación. Está incluida para dar las definiciones y el trasfondo de ciertos hechos históricos mencionado en el Capítulo 2.

Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ definimos la *Serie de Dirichlet* inducida como el objeto formal

$$D := \sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{1}{n^s}.$$

Notaremos con $\mathcal{D}$ al conjunto de las series de Dirichlet. De nuevo, formalmente definimos una estructura lineal en $\mathcal{D}$, a saber

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{1}{n^s} + \sum_{n\geqslant 1} b_n \frac{1}{n^s} := \sum_{n\geqslant 1} (a_n + b_n) \frac{1}{n^s},$$
$$\lambda \left(\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{1}{n^s} \right) := \sum_{n\geqslant 1} (\lambda a_n) \frac{1}{n^s},$$

y una estructura algebraica dada por el producto

$$\left(\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{1}{n^s} \right) \left(\sum_{n\geqslant 1} b_n \frac{1}{n^s} \right) := \sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{km=n} a_k b_m \right) \frac{1}{n^s}$$

usualmente llamado *producto de Dirichlet*. Estas series juegan un rol fundamental en la teoría de números. El ejemplo más prominente de una serie de Dirichlet es la bien conocida *función ζ de Riemann*

$$\zeta = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}.$$

Dado $\sigma \in \mathbb{R}$ será útil la notación $[Re > \sigma] := \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > \sigma\}$, $[Re < \sigma]$ y $[Re = \sigma]$ están definidos análogamente. Dada una serie de Dirichlet D y $s \in \mathbb{C}$ de forma que la serie compleja $D(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{1}{n^s}$ converge es sabido que $D(s')$ también converge para todo $s' \in [Re > Re(s)]$ (see [DGMSP19, Theorem 1.1]). Podemos considerar entonces, dada $D \in \mathcal{D}$, su *Abscisa de convergencia* definida como $[Re = \sigma_c(D)]$ donde

$$\sigma_c(D) := \text{ínf}\,\{\sigma \in \mathbb{R} : D \text{ converge en } [Re > \sigma]\}\,.$$

El siguiente resultado clásico de la teoría de series de Dirichlet es el primer paso en el estudio de estos objetos desde el punto de vista del análisis.

Teorema 1.5.1. *Sea D una serie de Dirichlet no divergente en todo punto. Entonces converge en $[Re > \sigma_c(D)]$ y diverge en $[Re < \sigma_c(D)]$. Más aún, la función definida por,*

$$\begin{aligned} D : [Re > \sigma_c] &\to \mathbb{C} \\ s &\mapsto D(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{1}{n^s}, \end{aligned}$$

es holomorfa.

Notemos que, para $D = \sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{1}{n^s}$, su región de convergencia absoluta es exactamente la región de convergencia para $\sum_{n\geqslant 1} |a_n| \frac{1}{n^s}$. Esto implica que la región de convergencia absoluta para una serie de Dirichlet es nuevamente un semiplano. Podemos considerar entonces la *abscisa de convergencia absoluta* para $D \in \mathcal{D}$ definido como $[Re = \sigma_a(D)]$ donde

$$\sigma_a(D) := \text{ínf}\,\{\sigma \in \mathbb{R} : D \text{ converge absolutamente en} [Re > \sigma]\}\,.$$

Es claro que $\sigma_c(D) \leqslant \sigma_a(D)$ para toda serie $D \in \mathcal{D}$.

Hay una tercera abscisa que juega un rol importante en esta parte de la teoría de series de Dirichlet. Observemos que dada una serie $D \in \mathcal{D}$ podemos mirar la sucesión de funciones definida por sus sumas parciales

$$(D_N)_{N\in\mathbb{N}} := \left(\sum_{n=1}^{N} a_n \frac{1}{n^s}\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

y estudiar su región de convergencia uniforme. De este modo surge la *abscisa de convergencia uniforme* para una serie $D \in \mathcal{D}$ como $[Re = \sigma_u(D)]$ donde

$$\sigma_u(D) := \text{ínf}\,\{\sigma \in \mathbb{R} : (D_N)_{N\in\mathbb{N}} \text{ converge absolutamente a} D \text{ en } [Re > \sigma]\}\,.$$

No es difícil ver que $\sigma_c(D) \leqslant \sigma_u(D) \leqslant \sigma_a(D)$ para toda serie $D \in \mathcal{D}$.

Es posible trazar un paralelismo entre el rol que juegan los semiplanos de convergencia, convergencia uniforme y convergencia absoluta para las series de Dirichlet y los discos de convergencia, convergencia uniforme y convergencia absoluta para series de Taylor. Es un resultado clásico que en el caso de series de Taylor todos esos discos coinciden. Algunas pregunta naturales que surgen de intentar entender este acercamiento a las series de Dirichlet son:

- ¿Serán los semiplanos de las distintas formas de convergencia siempre los mismos?
- Si no es así, ¿Cuán grande son las distancias entre cada una de las abscisas?

Para cierta serie de Dirichlet las abscisas podrían todas coincidir, pero esto no es verdad para una serie en general. Tomemos, por ejemplo, $\tilde{D} = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n n^{-s}$. Esta serie converge para $[Re > 0]$, pero $\sigma_a(\tilde{D}) > 1$, con lo cual $\sigma_a(\tilde{D}) - \sigma_c(\tilde{D}) \geqslant 1$. Por otro lado, dada $D = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$ con $\sigma_c(D) < \infty$, para $s_0 = \sigma_0 + it \in [Re > \sigma_c(D)]$, usando que $D(s_0)$ converge podemos garantizar que $(|a_n|n^{-\sigma_0})_{n\geqslant 1}$ está acotada por cierto $K > 0$. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\sum_{n\geqslant 1}\left|a_n \frac{1}{n^{s_0+1+\varepsilon}}\right| = \sum_{n\geqslant 1}|a_n|\frac{1}{n^{\sigma_0+1+\varepsilon}} \leqslant K\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \infty.$$

Luego $\sigma_a(D) \leqslant \sigma_c(D) + 1$. Esto prueba el siguiente teorema.

Teorema 1.5.2. $\sup\limits_{D\in\mathcal{D}} \sigma_a(D) - \sigma_c(D) = 1.$

Como hemos visto las series de Dirichlet tienen un nuevo comportamiento respecto de las series de Taylor en este sentido, y vale la pena estudiarlo.

En los primeros años del siglo XX Harald Bohr comenzó un estudio de las series de Dirichlet. En particular estaba muy interesado en determinar el tamaño de la brecha entre las regiones de convergencia, convergencia uniforme y convergencia absoluta. Con este problema general en mente desarrollo algunas herramientas que le permitieron probar que

$$\sup_{D\in\mathcal{D}} \sigma_u(D) - \sigma_c(D) = 1.$$

La última de las brechas,

$$\mathcal{S} := \sup_{D\in\mathcal{D}} \sigma_a(D) - \sigma_u(D),$$

históricamente requirió de mucho más esfuerzos para quedar determinada. El primer paso para entender este problema fue dar al conjunto de las series de Dirichlet una estructura de espacio de Banach. Consideremos

$$\mathcal{H}_\infty := \{D \in \mathcal{D} : \sigma_c(D) \leqslant 0\} \subset H([Re > 0]),$$

esto resulta un álgebra de Banach dotado de la norma dada por

$$\|D\|_{\mathcal{H}_\infty} := \sup_{s\in[Re>0]} |D(s)|.$$

Proposición 1.5.3 (Proposición 1.24 en [DGMSP19]). $\mathcal{S} = \sup\limits_{D\in\mathcal{H}_\infty} \sigma_a(D).$

Una de las ideas principales involucradas en resolver este problema consiste en el uso de la llamada *transformada Bohr*: una manera de tender un puente entre las series de Dirichlet y las funciones holomorfas de infinitas variables. Esta transformada se define del siguiente modo

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} : H_\infty(B_{c_0}) &\to \mathcal{H}_\infty \\ f &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

donde, dado un natural $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_N^{\alpha_N}$ escrito en términos de su descomposición en números primos y $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión de los primos ordenados, se define

$$a_n := \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{|z_1|=r} \cdots \int_{|z_N|=r} \frac{f(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots)}{z_1^{\alpha_1+1} \cdots z_N^{\alpha_N+1}} dz_1 \cdots dz_N.$$

En otras palabras $a_n = c_\alpha(f)$ con $n = p^\alpha := p_1^{\alpha_1} \cdots p_N^{\alpha_N}$.

Su inversa es llamada *levantamiento de Bohr* y se define como

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^{-1} : \mathcal{H}_\infty &\to H_\infty(B_{c_0}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} &\mapsto \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_{p^\alpha} z^\alpha, \end{aligned}$$

donde nuevamente $p^\alpha := p_1^{\alpha_1} \cdots p_N^{\alpha_N}$ para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N, 0, \ldots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$.

Teorema 1.5.4. *La transformada de Bohr es un isomorfismo isométrico entre las álgebra de Banach $\mathcal{H}_\infty$ y $H_\infty(B_{c_0})$.*

Del mismo modo que los polinomios m-homogéneos son cruciales para entender a las funciones holomorfas, este punto de vista sugiere la definición de las *series de Dirichlet m-homogéneas*. Recordemos que, para todo entero n, $\Omega(n)$ es el número de divisores primos de n contados con multiplicidad. El conjunto de series de Dirichlet m-homogéneas está definido por

$$\mathcal{D}_m := \left\{ \sum_n a_n n^{-s} \in \mathcal{D} : a_n \neq 0 \implies \Omega(n) = m. \right\}$$

Un problema intermedio en el camino de determinar el valor de $\mathcal{S}$ es entender su versión m-homogénea, la brecha

$$\mathcal{S}_m := \sup_{D\in\mathcal{D}_m} \sigma_a(D) - \sigma_u(D).$$

Para dar estructura de espacio de Banach a $\mathcal{D}_m$ definimos el subespacio de polinomios de Dirichlet m-homogéneos que convergen en el semiplano $[Re > 0]$ como

$$\mathcal{H}_\infty^m := \mathcal{D}_m \cap \mathcal{H}_\infty = \left\{ \sum_n a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty : a_n \neq 0 \implies \Omega(n) = m, \right\}$$

dotado de la misma norma que $\mathcal{H}_\infty$.

Teorema 1.5.5. *La transformada de Bohr es un isomorfismo isométrico entre los espacio de Banach* $\mathcal{H}_\infty^m$ *y* $\mathcal{P}(^m c_0)$.

Una herramienta muy útil para establecer el valor de $\mathcal{S}_m$ es la siguiente versión m-homogénea de la Proposición 1.5.3.

Proposición 1.5.6. $\mathcal{S}_m = \sup\limits_{D \in \mathcal{H}_\infty^m} \sigma_a(D)$.

Capítulo 2

Sumabilidad de coeficientes

En 1930 Littlewood [Lit30] probó su celebrada (y hoy en día clásica) desigualdad 4/3. Ésta establece que, dada una forma bilineal $B : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, se tiene que

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |B(e_i, e_j)|^{4/3} \right)^{3/4} \leqslant \sqrt{2} \|B\|_{\mathcal{L}(^2\ell_\infty^n)}.$$

Más aún, probó que el exponente 4/3 no puede mejorarse, i.e., para cada $r < 4/3$ es imposible tener una desigualdad análoga con una constante independiente del número de variables. Esta fue la primera de muchas desigualdades de este tipo involucrando la "sumabilidad de coeficientes", las cuales probaron ser muy útiles para resolver problemas en una amplia variedad de ramas de la matemática.

En los primeros años del siglo XX Harald Bohr [Boh13] comenzó un estudio de la teoría de series de Dirichlet. En particular estaba interesado en determinar el tamaño de la brecha entre las regiones donde esas series convergen en diferentes maneras. Uno de los principales y más difíciles problemas que presentó en este campo fue el de determinar la brecha más grande posible entre la abscisa de convergencia uniforma $\sigma_u(D)$ y de convergencia absoluta $\sigma_a(D)$ para serie de Dirichlet,

$$\mathcal{S} = \sup_{D \in \mathcal{D}} \sigma_a(D) - \sigma_u(D),$$

donde $\mathcal{D}$ representa el conjunto de las series de Dirichlet. Bohr logró demostrar que $\mathcal{S} \leqslant \frac{1}{2}$, entre otras muchas contribuciones a esta teoría, pero no pudo dar con el valor preciso de $\mathcal{S}$.

Él logró traducir este problema al lenguaje de las funciones holomorfas en infinitas variables a través de la llamada *transformada de Bohr*. En este contexto, un problema intermedio es determinar el tamaño de la brecha para las series de Dirichlet m-homogéneas

$$\mathcal{S}_m = \sup_{D \in \mathcal{D}_m} \sigma_a(D) - \sigma_u(D).$$

Con este problema en mente Bohnenblust y Hille lograron una novedosa generalización de la desigualdad 4/3 [BH31] que les permitió dar el valor de la brecha.

2.1. Algunos resultados de sumabilidad

Bohnenblust y Hille estaban interesados en encontrar el valor de la brecha entre las abscisas de convergencia uniforme y convergencia absoluta para series de Dirichlet. Para lograrlo mostraron una manera suficientemente buena de controlar la suma de los coeficientes de cualquier operador m-lineal a la potencia $\frac{2m}{m+1}$ por su norma uniforme en ℓ_∞.

Teorema 2.1.1 (Desigualdad multilineal de Bonhenblust-Hille)**.** *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, para todo operador m-lineal $T : \mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ existe $C_m > 0$ dependiendo sólo de m (no de n) de forma que*

$$\left(\sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_m \leqslant n} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leqslant C_m \|T\|_{\mathcal{L}({}^m\ell_\infty^n)}. \tag{2.1}$$

Más aún, el exponente $\frac{2m}{m+1}$ es óptimo.

En general, fijados $m, n \in \mathbb{N}$ y $1 \leqslant r < \infty$, podemos considerar la constante $C_{r,m}(n) > 0$ tal que para toda forma m-lineal $T : \mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ se sigue la cota

$$\left(\sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_m \leqslant n} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{r} \right)^{1/r} \leqslant C_{m,r}(n) \|T\|_{\mathcal{L}({}^m\ell_\infty^n)}.$$

Esta constante $C_{m,r}(n)$ puede depender de m y r pero además del número de variables complejas n. En el Teorema 2.1.1 óptimo significa que, si $C_{m,r}(n) = C_{m,r}$ no depende de n, entonces $r \geqslant \frac{2m}{m+1}$. En otras palabras, para $r < \frac{2m}{m+1}$ la dependencia en n de $C_{m,r}$ se vuelve explícita. En particular tendremos que $C_{m,r}(n) \to \infty$ cuando el número de variables n va a infinito.

Denotamos por BH_m^{mult} a la mejor constante C_m en el Teorema 2.1.1. La prueba original debida a Bohnenblust y Hille da la cota $B_m^{mult} \leqslant m^{\frac{m+1}{2m}} 2^{\frac{m-1}{2}}$.

Para alcanzar el valor de la brecha entre convergencia uniforme y absoluta en series de Dirichlet, Bohnenblust and Hille necesitaban una versión polinomial de esta desigualdad. Para obtenerla desarrollaron la polarización y gracias al Teorema 2.1.1 lograron el siguiente resultado.

Teorema 2.1.2 (Desigualdad polinomial de Bonhenblust-Hille)**.** *Dados $m, n \in \mathbb{N}$, para cualquier polinomio homogéneo $P \in \mathcal{P}({}^m\mathbb{C}^n)$ con coeficientes $(a_\alpha(P))_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$ existe una constante $C_m > 0$ dependiendo sólo de m de forma que*

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |a_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leqslant C_m \|P\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_\infty^n)}. \tag{2.2}$$

Más aún, $\frac{2m}{m+1}$ es óptimo.

Demostración. Sea $\check{P}$ la forma m-lineal simétrica asociada a P. Por el Teorema 2.1.1, la Observación 1.2.5 y usando la *fórmula de polarización* en el Teorema 1.2.6 tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)}|a_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} &= \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}|\check{P}(e_{j_1},\ldots,e_{j_m})||[\mathbf{j}]||^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}\\
&= \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\frac{|[\mathbf{j}]|^{\frac{2m}{m+1}}}{|[\mathbf{j}]|}\sum_{\mathbf{i}\in[\mathbf{j}]}|\check{P}(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}\\
&\leqslant m!^{\frac{m-1}{m+1}}\left(\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_m\leqslant n}|\check{P}(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}\\
&\leqslant m^m BH_m^{mult}\|\check{P}\|_{\mathcal{L}(^m\ell_\infty^n)} \leqslant m^{m+\frac{m+1}{2m}}2^{\frac{m-1}{2}}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_\infty^n)}\ ,
\end{aligned}$$

donde usamos $|[\mathbf{j}]| \leqslant m! \leqslant m^m$ para todo $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$ y la previamente mencionada cota para BH_m^{mult}. Daremos más adelante ejemplos de polinomios que prueban la optimalidad del exponente $\frac{2m}{m+1}$. □

Como en la versión multilineal, en el Teorema 2.1.2 óptimo significa que, si existe cierta constante $C_{r,m}(n) > 0$ de forma que para todo polinomio homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ vale

$$\left(\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)}|a_\alpha(P)|^r\right)^{1/r} \leqslant C_{m,r}(n)\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_\infty^n)},$$

con $C_{m,r}(n) = C_{m,r}$ independiente de n, esto implica que $r \geqslant \frac{2m}{m+1}$. Como antes, para $r < \frac{2m}{m+1}$ la dependencia en el número de variables se vuelve explícita y

$$C_{m,r}(n) \to \infty \text{ cuando } n \to \infty,$$

como mostraremos luego en este capítulo. Denotamos BH_m^{pol} a la mejor constante C_m en el Teorema 2.1.2. Muchos esfuerzos fueron volcados a encontrar buenas cotas para esta constante. Se desprende del Teorema 2.1.2 que $BH_m^{pol} \leqslant m^{m+\frac{m+1}{2m}}2^{\frac{m-1}{2}}$. Esta cota no es ni siquiera cercana a la mejor conocida para esta constante, una de las más importantes contribuciones a su estudio se encuentra en [DFOC$^+$11] donde los autores prueban que

$$BH_m^{pol} \leqslant \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\sqrt{m}2^{\frac{m-1}{2}}.$$

Gracias al Teorema 2.1.2, el hecho de que la transformada de Bohr es una isometría entre los espacios $\mathcal{H}_\infty^m$ y $\mathcal{P}(^m\ell_\infty)$ y la caracterización de $\mathcal{S}_m = \sup_{D\in\mathcal{H}_\infty^m}\sigma_a(D)$, Bonhenblust y Hille fueron capaces de mostrar que

$$\mathcal{S}_m = \frac{m-1}{2m},$$

y luego, como $\mathcal{S}_m \leqslant \mathcal{S} \leqslant \frac{1}{2}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, lograron concluir que

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}.$$

La desigualdad de Bohnenblust-Hille en el Teorema 2.1.2 explora el mejor número $1 \leqslant r \leqslant \infty$ de manera que el espacio de polinomios m-homogéneos acotados en la bola de ℓ_∞ pueda soportar la norma ℓ_r de coeficientes. Observemos que, dado $P \in \mathcal{P}(^m\ell_\infty)$, su sucesión de coeficientes $(a_\alpha(P))_{\alpha\in\Lambda(m)}$ puede tener infinitos elementos no nulos. Luego, dado $1 \leqslant r \leqslant \infty$, dicha sucesión puede o no estar en es espacio

$$\ell_r(\Lambda(m)) := \left\{ (a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m)} \subset \mathbb{C} : \left(\sum_{\alpha\in\Lambda(m)} |a_\alpha|^r \right)^{1/r} < \infty \right\}.$$

Una forma cualitativa de leer el Teorema 2.1.2 es el siguiente corolario.

Corolario 2.1.3. *Sea $m \in \mathbb{N}$, para todo polinomio m-homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m\ell_\infty)$ se tiene que $(a_\alpha(P))_{\alpha\in\Lambda(m)} \in \ell_{\frac{2m}{m-1}}(\Lambda(m))$. Más aún, para todo $1 \leqslant r < \frac{2m}{m-1}$ existe algún polinomio $P \in \mathcal{P}(^m\ell_\infty)$ de forma que $(a_\alpha(P))_{\alpha\in\Lambda(m)} \notin \ell_r(\Lambda(m))$.*

Ahora simplemente probaremos el primer hecho que el Corolario 2.1.3 declara usando el Teorema 2.1.2. Para probar el segundo hecho enunciado necesitaremos mostrar algún polinomio en $\mathcal{P}(^m\ell_\infty)$ con norma ℓ_r acotada para sus coeficientes. En la prueba original de su resultado, Bohnenblust y Hille construyeron una familia de polinomios que cumplen esta condición. Nosotros seguiremos otro camino, que usa la teoría de probabilidades para asegurar la existencia de cierto tipo de polinomios extremales. Estos polinomios nos permitirán una mejor comprensión de un problema más general y los presentaremos luego en la Subsección 2.2.1.

Prueba de la primer parte del enunciado en el Corolario 2.1.3. Para $P \in \mathcal{P}(^m\ell_\infty)$ consideremos su composición con la proyección a las primeras n coordenadas $P_n = P \circ \pi_n \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$. Debido al Teorema 2.1.2, usando que $\|P_n\|_{\mathcal{P}(^m\ell_\infty^n)} \leqslant \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_\infty)}$ (por el Corolario 1.2.3) y gracias a la Observación 1.2.4 tenemos que

$$\left(\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} |a_\alpha(P)|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leqslant C_m \|P_n\|_{\mathcal{P}(^m\ell_\infty^n)} \leqslant C_m \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_\infty)},$$

donde $C_m > 0$ y no depende de n. Tomando el límite de n yendo a ∞ tenemos lo que necesitamos. □

Ahora parece natural preguntarnos si podemos cambiar el espacio ℓ_∞ en el Corolario 2.1.3 por otro espacio ℓ_p y tener un resultado similar. Esta es la primera de una serie de preguntas que intentaremos responder en este capítulo. Así como el desencadenante de la desigualdad Bonhenblust-Hille fue la desigualdad 4/3 de Littlelwood, el primer intento de responder a la pregunta anterior fue una generalización del resultado de Littlelwood dado por la legendaria pareja que hizo con Hardy [HL34]. En esta generalización se consideran formas bilineales $B : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ y se estudian desigualdades de la forma

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |B(e_i, e_j)|^q \right)^{1/q} \leqslant K \|B\|_{\mathcal{L}(\ell_{p_1}^n, \ell_{p_2}^n)}.$$

Hardy y Littlelwood estaban particularmente interesados en las condiciones sobre $1 \leqslant q, p_1, p_2 \leqslant \infty$ que garanticen la existencia de $K > 0$ independiente de n. Medio siglo después las desigualdades bilineales de Hardy y Littlelwood inspiraron a Praciano-Pereira a atacar la versión multilineal del problema [PP81]. Este problema fue estudiado también por Dimant y Sevilla-Peris en [DSP16].

Dado un polinomio m-homogéneo $P(z) = \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} a_\alpha z^\alpha$ en n variables complejas denotamos su norma ℓ_r de coeficientes por

$$|P|_q := \Big(\sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |a_\alpha|^q \Big)^{1/q}.$$

Otra norma, relacionada a los coeficientes es la llamada q-norma de Bombieri definida en [BBEM90]:

$$[P]_q := \Big(\sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} \big(\frac{\alpha!}{m!} \big)^{q-1} |a_\alpha|^q \Big)^{1/q}.$$

La relación entre estas normas de coeficientes está dada por las siguientes desigualdades (ver [BBEM90]):

$$(m!)^{\frac{1}{q}-1} |P|_q \leqslant [P]_q \leqslant |P|_q. \tag{2.3}$$

Para $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ diremos que vale una *desigualdad polinomial de tipo Hardy-Littlewood* cuando, dados $m, n \in \mathbb{N}$ exista cierta $C_{m,p,q} > 0$ independiente de n de manera que

$$|P|_q \leqslant C_{m,p,q} \|P\|_{\mathcal{P}(^m \ell_p^n)}, \tag{2.4}$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^m \mathbb{C}^n)$. Cuando valga una desigualdad de Hardy-Littlewood para $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ diremos que (p, q) forma una *pareja de Hardy-Littlewood.*

El siguiente lema, el cual se sigue inmediatamente de la fórmula integral de Cauchy en (1.12), será de gran importancia en el desarrollo del Teorema 2.1.7 fundamental, en esta tesis. Además será útil para entender que (p, ∞) forma una *pareja de Hardy-Littlewood* para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Para algunos valores de $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ésta será la única pareja de Hardy-Littlewood posible.

Lema 2.1.4. *Dados $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \Lambda(m, n)$, para todo $P \in \mathcal{P}(^m \mathbb{C}^n)$ vale que*

$$|a_\alpha(P)| \leqslant \left(\frac{m^m}{\alpha^\alpha} \right)^{1/p} \|P\|_{\mathcal{P}(^m \ell_p^n)}. \tag{2.5}$$

Demostración. Dado $u = \frac{1}{m^{1/p}}\alpha^{1/p} \in B_{\ell_p^n}$ mediante la fórmula integral de Cauchy en (1.10) tenemos

$$\begin{aligned} |a_\alpha(P)| &\leqslant \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{|z_1|=u_1}\cdots\int_{|z_n|=u_n}\frac{|P(z)|}{|z_1^{\alpha_1+1}\cdots z_n^{\alpha_n+1}|}dz \\ &\leqslant \frac{1}{u_1^{\alpha_1}\cdots u_n^{\alpha_n}}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \leqslant \left(\frac{m^m}{\alpha^\alpha}\right)^{1/p}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}, \end{aligned}$$

ya que $z \in B_{\ell_p^n}$ para todo $|z| = u$. □

En algunos problemas será necesario entender, dado un multi-índice $\alpha \in \Lambda(M,n)$, cómo acotar $\frac{M^M}{\alpha^\alpha}$. Por ejemplo, si $n \geqslant M$ podemos tomar

$$\alpha = (\underbrace{1,\ldots,1}_{M},0,\ldots,0),$$

en este caso $\frac{M^M}{\alpha^\alpha} = M^M$. Por otro lado si $\alpha = (M,0,\ldots,0)$ un simple cálculo nos dice que $\frac{M^M}{\alpha^\alpha} = 1$. En general $\alpha^\alpha \geqslant 1$ para cualquier $\alpha \in \Lambda(M,n)$, luego

$$\sup_{\alpha\in\Lambda(M,n)}\frac{M^M}{\alpha^\alpha} \leqslant M^M, \tag{2.6}$$

y la desigualdad vale para $n \geqslant M$. Gracias al Lema 2.1.4 y la ecuación (2.6) tenemos, para cada $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$, que

$$|P|_\infty \leqslant m^m\|P\|_{\mathcal{P}(\ell_p^n)}. \tag{2.7}$$

Observación 2.1.5. Para $1 \leqslant p \leqslant m$ no existe $q < \infty$ de forma que (p,q) sea una pareja de Hardy-Littelwood.
De hecho, como $m \leqslant p$, tomando $P = \sum_{j=1}^n z_j^m$ para cada $z \in \mathbb{C}^n$ tenemos

$$|P(z)| \leqslant \sum_{j=1}^n |z_j|^m = \|z\|_{\ell_m}^m \leqslant \|z\|_{\ell_p}^m,$$

y luego se sigue que

$$|P|_q = n^{\frac{1}{q}} \text{ y } \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \leqslant 1.$$

Esto prueba que no hay ninguna constante independiente de n como en la ecuación (2.4).

El siguiente resultado reúne [DSP16, Proposition 4.1] y [PP81, Theorem A and Theorem B] completando la descripción de las desigualdades polinomiales de tipo Hardy-Littelwood.

Teorema 2.1.6 (Desigualdades polinomiales de tipo Hardy-Littlewood)**.** *Fijados $m,n \in \mathbb{N}$ y $m < p \leqslant \infty$, existe una constante $C_{m,p} > 0$ dependiendo sólo de m y p (no de n) de forma que, para todo polinomio m-homogéneo en n variables complejas P tenemos:*

$$(i) \qquad |P|_{\frac{p}{p-m}} \leqslant C_{m,p}\,\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \qquad \textit{para } m \leqslant p \leqslant 2m,$$

$$(ii) \qquad |P|_{\frac{2mp}{mp+p-2m}} \leqslant C_{m,p}\,\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \qquad \textit{para } 2m \leqslant p.$$

Nuevamente los exponentes $\frac{p}{p-m}$ y $\frac{2mp}{mp+p-2m}$ en las desigualdades anteriores son los mejores posibles. Observemos que, en el caso límite ($p=\infty$) recuperamos el clásico exponente de Bohnenblust-Hille $\frac{2m}{m+1}$.

Gracias a la Observación 2.1.5 y el Teorema 2.1.6 tenemos la descripción completa de condiciones de existencia para desigualdades de Hardy-Littlelwood. De todos modos podríamos conseguir desigualdades más útiles modificando la norma de coeficientes en el lado izquierdo de las desigualdades o aceptando una más amplia variedad de espacios donde tomar norma uniforme en el lado derecho. Un ejemplo de este tipo de modificación en el lado izquierdo es el siguiente teorema debido a Bayart, Defant y Schlüters [BDS19]. Aquí presentamos una pequeña modificación de este resultado. Esto nos permitirá mejores cotas en futuras aplicaciones.

Teorema 2.1.7 (Desigualdad de Bayart-Defant-Shlüters)**.** *Sean $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m,n \in \mathbb{N}$ y $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$. Luego para cada $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)$ con el multi-índice asociado $\alpha(\mathbf{j}) \in \Lambda(m-1,n)$ tenemos*

$$\left(\sum_{k=j_{m-1}}^{n} |c_{(\mathbf{j},k)}(P)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant em\Big(\frac{(m-1)^{m-1}}{\alpha(\mathbf{j})^{\alpha(\mathbf{j})}}\Big)^{\frac{1}{p}} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}. \tag{2.8}$$

El Teorema 2.1.7 será un ingrediente fundamental en el desarrollo de los Capítulos 3, 5, 6 y 8. Usaremos con frecuencia la desigualdad en el Teorema 2.1.7 la cual llamaremos *Desigualdad de Bayart-Defant-Schlüters* o en ocasiones *Desigualdad DBS* para abreviar.

Seguiremos el artículo [BDS19] y daremos la prueba del Teorema 2.1.7 por completitud.

Para $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)$ y $\alpha(\mathbf{j}) \in \Lambda(m-1,n)$ su multi-índice asociado, vale que $\frac{(m-1)^{m-1}}{\alpha(\mathbf{j})^{\alpha(\mathbf{j})}} \leqslant e^{m-1}\frac{(m-1)!}{\alpha(\mathbf{j})!} = e^{m-1}|[\mathbf{j}]|$, luego por el Teorema 2.1.7 tenemos

$$\left(\sum_{k=j_{m-1}}^{n} |c_{(\mathbf{j},k)}(P)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant me^{1+\frac{m-1}{p}} |[\mathbf{j}]|^{\frac{1}{p}} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}, \tag{2.9}$$

para cada polinomio $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ como aparece en [BDS19, Lemma 3.5].

Proposición 2.1.8. *Sean $m,n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y $Q \in \mathcal{L}(\ell_p^n, \mathcal{P}(^{m-1}\ell_p^n))$ el operador lineal dado por*

$$Q(w)(z) := \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{(\mathbf{j},k)} w_k\right) z_{\mathbf{j}},$$

para $z,w \in \mathbb{C}^n$. Luego para cada $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)$ y $\alpha = \alpha(\mathbf{j}) \in \Lambda(m-1,n)$ vale que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |b_{(\mathbf{j},k)}|^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant \left(\frac{(m-1)^{m-1}}{\alpha^\alpha}\right)^{1/p} \|Q\|.$$

Demostración. Para cada $w \in B_{\ell_p^n}$ podemos considerar $P_w = Q(w) \in \mathcal{P}(^{m-1}\ell_p^n)$. Notemos que para $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)$, si $\alpha = \alpha(\mathbf{j})$ es su multi-índice asociado, tenemos

$a_\alpha(P_w) = \sum_{k=1}^n b_{(\mathbf{j},k)} w_k$. Por el Lema 2.1.4 tenemos que

$$\left|\sum_{k=1}^n b_{(\mathbf{j},k)} w_k\right| = |a_\alpha(P_w)| \leqslant \left(\frac{(m-1)^{m-1}}{\alpha^\alpha}\right)^{1/p} \|P_w\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}$$
$$= \left(\frac{(m-1)^{m-1}}{\alpha^\alpha}\right)^{1/p} \|Q(w)\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \leqslant \left(\frac{(m-1)^{m-1}}{\alpha^\alpha}\right)^{1/p} \|Q\|.$$

Tomando supremo sobre $w \in B_{\ell_p^n}$ y usando la dualidad $(\ell_p)' = \ell_{p'}$ el resultado se sigue. $\square$

Necesitaremos una última observación para probar el Teorema 2.1.7. Notemos que, fijados $m, n \in \mathbb{N}$, dado $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)$ y $1 \leqslant k \leqslant n$ el cardinal de la clase de equivalencia de $(\mathbf{j},k)$ comparado con $|[\mathbf{j}]|$ cumple con la desigualdad

$$|[(\mathbf{j},k)]| \leqslant m|[\mathbf{j}]|. \tag{2.10}$$

Esto vale porque el caso en el que $|[(\mathbf{j},k)]|$ es lo más grande posible se consigue cuando $k \neq j_i$ para todo $1 \leqslant i \leqslant m-1$. Además, en este caso la cantidad de vectores diferentes que se obtienen mezclando $(\mathbf{j},k)$ es $m \times |[\mathbf{j}]|$, ya que k genera un vector diferente para cada posición.

Demostración del Teorema 2.1.7. Dado $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ tomemos $T = \check{P} \in \mathcal{L}(^m\mathbb{C}^n)$ su forma m-lineal simétrica asociada. Por la Observación 1.2.5 para todo $z^{(1)}, \dots, z^{(m)}\mathbb{C}^n$ podemos escribir

$$T(z^{(1)}, \dots, z^{(m)}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} c_{\mathbf{i}}(T) z_{i_1}^{(1)} \cdots z_{i_m}^{(m)},$$

con $c_{\mathbf{i}}(T) = \frac{c_{\mathbf{j}}(P)}{|[\mathbf{j}]|}$ if $\mathbf{i} \in [\mathbf{j}]$.

Podemos definir $Q \in \mathcal{L}(\ell_p^n, \mathcal{P}(^{m-1}\ell_p^n))$ para $z, w \in \mathbb{C}^n$ por

$$Q(w)(z) := T(\underbrace{z, \dots, z}_{m-1}, w).$$

Calculemos ahora $Q(z)(w)$ en función de los coeficientes de T,

$$\begin{aligned} Q(w)(z) = T(z, \dots, z, w) &= \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} c_{\mathbf{i}}(T) z_{i_1} \cdots z_{i_{m-1}} w_{i_m} \\ &= \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m-1,n)} \sum_{k=1}^n c_{(\mathbf{i},k)}(T) z_{\mathbf{i}} w_k \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} \sum_{\mathbf{i} \in [\mathbf{j}]} \sum_{k=1}^n c_{(\mathbf{i},k)}(T) z_{\mathbf{i}} w_k \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} |[\mathbf{j}]| \sum_{k=1}^n c_{(\mathbf{j},k)}(T) z_{\mathbf{j}} w_k \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} \left(\sum_{k=1}^n |[\mathbf{j}]| c_{(\mathbf{j},k)}(T) w_k\right) z_{\mathbf{j}}, \end{aligned}$$

ya que, para todo $\mathbf{i} \in [\mathbf{j}]$, vale $c_{(\mathbf{i},k)}(T) = c_{(\mathbf{j},k)}(T)$.

Usando la Proposición 2.1.8, la desigualdad en (2.10), y la desigualdad de Harris en el Teorema 1.2.7 se sigue que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=j_{m-1}}^{n} (c_{(\mathbf{j},k)}(P))^{p'}\right)^{1/p'} &= \left(\sum_{k=1}^{n} (|[(\mathbf{j},k)]| c_{(\mathbf{j},k)}(T))^{p'}\right)^{1/p'} \\ &\leqslant m \left(\sum_{k=1}^{n} (|[\mathbf{j}]| c_{(\mathbf{j},k)}(T))^{p'}\right)^{1/p'} \\ &\leqslant m \left(\frac{(m-1)^{m-1}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{1/p} \|Q\| \leqslant m \left(\frac{(m-1)^{m-1}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{1/p} e\|P\|,\end{aligned}$$

donde $\alpha = \alpha(\mathbf{j})$. □

La última desigualdad de sumabilidad necesaria en los siguientes capítulos está dada por el siguiente teorema.

Teorema 2.1.9. *Dados $m, n \in \mathbb{N}$ y un polinomio homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ se tiene*

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,k)} |c_{(\mathbf{j},k)}(P)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant em2^{\frac{m-1}{2}} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_\infty^n)}.$$

Una versión más general del Teorema 2.1.9 y su demostración pueden encontrarse en [BDF$^+$17, Lemma 2.5].

Notemos que las desigualdades en el Teorema 2,1,7 y el Teorema 2.1.9 pueden reescribirse en términos de la comparación de dos normas en el espacio de polinomios m-homogéneos en n variables complejas. Si consideramos la norma mixta de coeficientes en $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ definida, para cierto polinomio P, por

$$|P|_{(\infty,\ldots,\infty,p')} := \sup_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} \left(\sum_{k=j_{m-1}}^{n} (c_{(\mathbf{j},k)}(P))^{p'}\right)^{1/p'},$$

podemos reescribir el Teorema 2.1.7 como

$$|P|_{(\infty,\ldots,\infty,p')} \leqslant em(m-1)^{m-1} \|P\|_{\ell_p^n}, \tag{2.11}$$

para cada $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$ y $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$.

Por otro lado podemos definir para $P(z) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}} \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ la norma dada por

$$|P|_{(1,2,\ldots,2)} := \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,k)} |c_{(\mathbf{j},k)}(P)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ahora podemos traducir el Teorema 2.1.9 a través de esta norma como

$$|P|_{(1,2,\ldots,2)} \leqslant em2^{\frac{m-1}{2}} \|P\|_{\ell_\infty^n}, \tag{2.12}$$

para cada $m, n \in \mathbb{N}$ y $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$.

En ambos casos esto da una suerte de desigualdad de Hardy-Littlelwood, especialmente interesante para $1 \leqslant p \leqslant m$ donde mostramos que las clásicas desigualdades polinomiales de Hardy-Littlelwood no valen para $q < \infty$. Para $1 \leqslant p < m$ (2.11) da una desigualdad de sumabilidad mejor que la dada por (2.7). Por otro lado comparando la desigualdad clásica de Bonhenblust-Hille en el Teorema 2.1.2 con la dada por (2.12), esta última da una cota para una norma mixta de coeficientes con exponentes independientes de m. Esto será crucial en el estudio de funciones holomorfas.

2.2. Más allá de la sumabilidad

Si cambiamos alguno de los parámetros involucrados en cualquiera de los lados de la desigualdad de Hardy-Littlewood en (2.4) por otros más allá de los límites descriptos en la Observación 2.1.5 y el Teorema 2.1.6, es esperable que la dependencia en el número de variables se vuelva aparente. Vale la pena preguntarse cómo es esta dependencia en términos de la sumabilidad de coeficientes, la norma uniforme y el grado de homogeneidad considerados.
Análogamente, podemos estudiar un problema similar: la desigualdad que nace intercambiar los roles (lados en la desigualdad) entre la norma de coeficientes y la norma uniforme.

Problema 2.2.1. *Sean $A^m_{p,q}(n)$ y $B^m_{q,p}(n)$ las constantes más chicas que cumplen las siguiente desigualdades: para todo polinomio m-homogéneo en n variables complejas P,*

$$\begin{aligned} |P|_q &\leqslant A^m_{p,q}(n)\ \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}, \\ \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} &\leqslant B^m_{q,p}(n)\ |P|_q. \end{aligned}$$

¿Cómo se comportan estas constantes en términos del número de variables n? ¿Cuál es su crecimiento asintótico exacto?

Desde el punto de vista de la teoría de operadores estas constantes son exactamente la norma de la identidad entre los espacios de Banach $\mathcal{P}(^m\ell_p^n)$ y $(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_q)$, i.e.,

$$\begin{aligned} A^m_{p,q}(n) &= \|id : \mathcal{P}(^m\ell_p^n) \to (\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_q)\ \|, \\ B^m_{q,p}(n) &= \|id : (\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_q) \to \mathcal{P}(^m\ell_p^n)\|. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Observemos que, gracias a (2.3), la dependencia en n de la constante que aparece al comparar la norma del supremo con la de Bombieri es exactamente la misma que la de las constantes relacionadas al Problema 2.2.1.

En los 80's, Goldberg [Gol87] estableció un problema similar en el contexto de la teoría de matrices: dada una matriz A de tamaño $n \times n$, él estaba interesado en encontrar las mejores constantes de equivalencia $c(q,p,n)$ (o su comportamiento asintótico cuando n tiende a infinito) que relacionan la norma ℓ_q de los coeficientes con la norma del operador A actuando en ℓ_p^n. Resultados parciales y ajustados para este problema (y algunas de sus variantes) fueron dados por Feng y Tonge en [Ton00, Fen03, FT07]. Notemos que el Problema 2.2.1 es esencialmente una versión polinomial del problema de Golberg.

Para atacar el problema principal de esta sección será útil comparar, dado un polinomio $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y $1 \leqslant r,s \leqslant \infty$, las normas uniformes $\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}$ y $\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_s^n)}$, y las normas de coeficientes $|P|_r$ y $|P|_s$. Recordemos que, para cada $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant \infty$ y $z \in \mathbb{C}^n$, vale la siguiente relación entre las normas en ℓ_r^n y ℓ_s^n,

$$\|z\|_s \leqslant \|z\|_r \leqslant n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}\|z\|_s, \tag{2.14}$$

la cual puede reformularse en términos de las bolas de ambos espacios como

$$B_{\ell_r^n} \subset B_{\ell_s^n} \subset n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} B_{\ell_r^n}. \tag{2.15}$$

Necesitaremos en varias oportunidades la *fórmula de Stirling* o *desigualdad de Stirling*, que da la siguiente cota

$$\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\frac{1}{12k+1}} \leqslant k! \leqslant \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k e^{\frac{1}{12k}}, \tag{2.16}$$

para todo número natural k. Usando esta fórmula obtenemos

$$\begin{aligned}\binom{m+n-1}{m} &= \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!} \leqslant \sqrt{\frac{m+n-1}{(n-1)m}}\frac{(m+n-1)^{m+n-1}}{m^m(n-1)^{n-1}} \\ &\leqslant 2\left(1+\frac{n-1}{m}\right)^m\left(1+\frac{m}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant 2e^m n^m.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Observación 2.2.2. Dados $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant \infty$ y $m,n \in \mathbb{N}$, para todo polinomio homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ vale que

$$|P|_s \leqslant |P|_r \leqslant \binom{m+n-1}{n}^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} |P|_s \leqslant (2e^m)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} n^{m(\frac{1}{r}-\frac{1}{s})}|P|_s, \tag{2.18}$$

y

$$\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \leqslant \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_s^n)} \leqslant n^{m(\frac{1}{r}-\frac{1}{s})}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}. \tag{2.19}$$

Demostración. Fijemos $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$. Comencemos por la comparación para la norma de coeficientes (2.18). Recordemos que la dimensión de $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ como $\mathbb{C}$ espacio vectorial es $\binom{m+n-1}{m}$. Luego, por la definición de la norma de coeficientes, es claro que $(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_r)$ es isométrico a $\ell_r^{\binom{m+n-1}{m}}$. Usando las cotas en (2.14) y (2.17) tenemos

$$|P|_s \leqslant |P|_r \leqslant \binom{m+n-1}{n}^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} |P|_s \leqslant (2e^m)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} n^{m(\frac{1}{r}-\frac{1}{s})}|P|_s.$$

Para conseguir la comparación en (2.19) usamos (2.15) y la homogeneidad de P, luego

$$\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} = \|P\|_{B_{\ell_r^n}} \leqslant \|P\|_{B_{\ell_s^n}} \leqslant \|P\|_{n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}B_{\ell_s^n}} = n^{m(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\|P\|_{B_{\ell_r^n}}. \qquad \square$$

2.2.1. Polinomios aleatorios

Como es usual, para entender la norma de operadores acotados es necesario tener una cota global para todo elemento en el dominio y, frecuentemente, algún elemento particular para mostrar que la cota global es ajustada. Presentaremos ahora una familia de polinomios que muestra la precisión de cotas en muchos ejemplos en el estudio de polinomios y funciones holomorfas en espacios de Banach y también lo hará en varios contextos diferentes a lo largo de la tesis. La existencia de estos polinomios se prueba usando métodos probabilísticos.

Bayart en [Bay12] (ver también [Boa00, DGM03, DGM04]) exhibió polinomios con coeficientes unimodulares y con norma del supremo pequeña sobre la bola de ℓ_p^n. Más aún, él mostró que para cada $1 < p \leqslant \infty$ y toda sucesión de coeficientes $(a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}$ existe una sucesión de signos $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \subset \mathbb{T}$ que define un polinomio m-homogéneo $P(z) := \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha a_\alpha z^\alpha$ en n varias complejas de forma que

$$\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \leqslant K_{m,p} \times \begin{cases} n^{1-\frac{1}{p}} & \text{si } 1 < p \leqslant 2, \\ n^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}} & \text{si } 2 \leqslant p \leqslant \infty, \end{cases} \tag{2.20}$$

donde $K_{m,p} \leqslant C \log(m)^{1-\frac{1}{p}} \sup_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \left\{ |a_\alpha| \left(\frac{\alpha!}{m!}\right)^{1/p} \right\}$ para cierto $C > 0$ independiente de n, m y p.

Podemos elegir $a_\alpha = 1$ para todo $\alpha \in \Lambda(m,n)$. En este caso tenemos polinomios unimodulares y vale la cota

$$K_{m,p} \leqslant C \log(m)^{1-\frac{1}{p}}. \tag{2.21}$$

Además, la cantidad de coeficientes no nulos es exactamente el número de posibles monomios, $\binom{n+m-1}{m}$. Estos polinomios serán de gran utilidad: por ejemplo, serán extremales en un amplio rango de $p, r \in [1,\infty]$ en la desigualdad del Problema 2.2.1. Desafortunadamente, para un gran rango de valores de p y r estos polinomios no son suficientes y son necesarios nuevos ejemplos extremales. Por lo tanto, es importante relajar el número de términos que aparecen en los polinomios, permitiéndoles tener algunos coeficientes nulos, para reducir cuantitativamente el valor de la norma uniforme. Obviamente, si uno se deshace de muchos coeficientes/monomios, esto ayuda a reducir considerablemente el valor de la norma, pero es importante mantener un equilibrio apropiado (tener un número suficiente de coeficientes distintos de cero pero mantener la norma pequeña).

Introducimos los llamados *polinomios de Steiner*, una clase especial de polinomios tetraedrales definidos por Dixon en [Dix76] y estudiados allí con norma uniforme en ℓ_∞^n. En [GMSP15] los autores analizan el caso de estos polinomios tetraedrales con norma uniforme en ℓ_p^n. Resulta que dichos polinomios dan cotas inferiores suficientemente precisas para la constante $A_{p,q}^m(n)$ en muchos casos.

Necesitamos algunas definiciones para describirlos. Un *sistema parcial de Steiner* $S_p(t,m,n)$ es una colección de subconjuntos de tamaño m de $\{1,\ldots,n\}$ tal que todo subconjunto de t elementos está contenido en a lo sumo un miembro de la colección. Notemos que podemos ver a todo sistema parcial de Steiner $S_p(t,m,n)$ como un subconjunto del conjunto de índices $\mathcal{J}(m,n)$. Un polinomio m-homogéneo en n variables compleja P es un *polinomio de Steiner* si existe un sistema parcial de Steiner $S_p(t,m,n)$, al que llamamos $\mathcal{S}$, de forma que $P(z_1,\ldots,z_n) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{S}} c_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}}$ y $c_{\mathbf{j}} = \pm 1$. Notemos que los monomios involucrados en esta clase tienen una configuración combinatoria particular.

Los siguientes resultados aparecen en [GMSP15, Theorem 2.5.].

Teorema 2.2.3. *Sean $m \geqslant 2$ y $\mathcal{S}$ un sistema parcial de Steiner $S_p(m-1,m,n)$. luego existen signos $(c_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathcal{S}}$ y una constante $D_{m,p} > 0$ independiente de n tal que el polinomio m-homogéneo $P = \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{S}} c_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}}$ satisface*

$$\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \leqslant D_{m,p} \times \begin{cases} \log^{\frac{3p-3}{p}}(n) & \text{para } 1 \leqslant p \leqslant 2, \\ \log^{\frac{3}{p}}(n) n^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} & \text{para } 2 \leqslant p < \infty. \end{cases}$$

Más aún, la constante $D_{m,p}$ puede tomarse independiente de m si $p \neq 2$.

El último ingrediente que necesitamos para las aplicaciones es la existencia de sistema parciales de Steiner casi óptimos, en el sentido de que tienen muchos elementos. Esto se traduce en muchos coeficientes unimodulares para los polinomios de Steiner. Es bien sabido que cualquier sistema parcial de Steiner $S_p(m-1,m,n)$ tiene cardinal menor o igual que $\frac{1}{m}\binom{n}{m-1}$.

Rödl [Röd85] en la década de los ochenta probó que existe un sistema parcial de Steiner $S_p(m-1,m,n)$ de cardinal al menos $(1-o(1))\frac{1}{m}\binom{n}{m-1}$, donde $o(1)$ tiende a cero cuando n va a infinito. Tomando un sistema parcial de Steiner de este cardinal en el Teorema 2.2.3 tenemos lo siguiente.

Corolario 2.2.4. *Para $m \geqslant 2$, existe un polinomio de Steiner m-homogéneo P de n variables complejas con al menos $C_m n^{m-1}$ coeficientes unimodulares satisfaciendo las estimaciones del Teorema 2.2.3, donde C_m es una constante que depende sólo de m.*

2.2.2. Una solución parcial al problema.

Si $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son dos sucesiones de números reales escribiremos $a_n \ll b_n$ si existe una constante $C > 0$ (independiente de n) tal que $a_n \leqslant C b_n$ para todo n. Notaremos $a_n \sim b_n$ si $a_n \ll b_n$ y $b_n \ll a_n$. Recordemos que la cantidad de monomios m-homogéneos en n variables complejas es $|\mathcal{J}(m,n)| = \binom{n+m-1}{m} \sim n^m$.

Dado un operador m-lineal $T \in \mathcal{L}(^m\mathbb{C}^n)$ denotaremos su norma r-ésima de coeficientes por $|T|_r$, esto es,

$$|T|_r := \Big(\sum_{i\in\mathcal{M}(m,n)} |T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^r \Big)^{\frac{1}{r}},$$

donde $\mathcal{M}(m,n) = \{\mathbf{i} = (i_1,\ldots,i_m) : 1 \leqslant i_l \leqslant n, 1 \leqslant l \leqslant m\}$. Usando la Observación 1.2.5 y la *fórmula de Harris* en el Teorema 1.2.7 no es difícil ver que existen constantes $C_l = C_l(m) > 0$, para $l = 1,2$, independientes de n, de forma que para todo polinomio $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y su operador m-linear simétrico asociado $\check{P}$ tenemos

$$|\check{P}|_r \leqslant |P|_r \leqslant C_1 |\check{P}|_r \qquad \text{para } 1 \leqslant r \leqslant \infty, \tag{2.22}$$

$$C_2 \|\check{P}\|_{\mathcal{L}(^m\ell_p^n)} \leqslant \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \leqslant \|\check{P}\|_{\mathcal{L}(^m\ell_p^n)} \qquad \text{para } 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{2.23}$$

Será útil notar que, como $(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_r)$ es un espacio $L_p(U,\mu)$ donde μ es la medida de contar y $U = \Lambda(m,n)$, gracias a la ecuación (1.13) tenemos

$$[(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_{r_0}), (\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_{r_1})]_\theta = (\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_r) \tag{2.24}$$

para todo $0 < \theta < 1$ donde $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$. Necesitaremos esto en la prueba del siguiente teorema pero también será necesario a lo largo de la tesis en más de una oportunidad.

Ahora enunciamos nuestro teorema principal de este capítulo.

Teorema 2.2.5. *Sea $A^m_{p,q}(n)$ la más chica de las constantes tales que, para todo polinomio m-homogéneo en n variables complejas P vale $|P|_q \leqslant A^m_{p,q}(n)\, \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}$. Luego,*

$$\begin{cases} A^m_{p,q}(n) \sim 1 & \textit{para } (A): [\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{q} \leqslant \frac{m+1}{2m} - \frac{1}{p}] \textit{ o } [\frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{2} \wedge \frac{m}{p} \leqslant 1 - \frac{1}{q}], \\ A^m_{p,q}(n) \sim n^{\frac{m}{p}+\frac{1}{q}-1} & \textit{para } (B): [\frac{1}{2m} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{m} \wedge -\frac{m}{p} + 1 \leqslant \frac{1}{q}], \\ A^m_{p,q}(n) \sim n^{m(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} & \textit{para } (C): [\frac{m+1}{2m} \leqslant \frac{1}{q} \wedge \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2}] \textit{ o } \\ & \qquad [\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{q} \leqslant \frac{m+1}{2m} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \wedge \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2}], \\ A^m_{p,q}(n) \sim n^{\frac{m}{q}+\frac{1}{p}-1} & \textit{para } (D): [\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{p} \wedge 1 - \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{q}], \\ A^m_{p,q}(n) \ll n^{\frac{m-1}{q}} & \textit{para } (E): [\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant 1 - \frac{1}{q}], \\ A^m_{p,q}(n) \sim n^{\frac{1}{q}} & \textit{para } (F): [\frac{m-1}{p} \leqslant 1 - \frac{1}{q} \wedge \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{m-1}], \end{cases}$$

Más aún, la potencia de n en (E) no puede ser mejorada.

La Figura 2.1 representa las regiones descriptas en el Teorema 2.2.5. Para la región en blanco no se sabe el orden correcto de $A^m_{p,q}(n)$ (ver los comentarios luego del Corolario 2.3.4 debajo). Es destacable que gran parte del trabajo consiste en determinar *cuáles son las regiones* a considerar.

Notemos además que para $m = 2$ tenemos la descripción completa del comportamiento asintótico de $A^2_{p,q}(n)$. Para $q \geqslant 2$ el resultado puede derivarse como consecuencia de [FT07, Theorems 1 and 2].

Demostración. Sea P un polinomio m-homogéneo en n variables complejas y $T = \check{P}$ su forma m-lineal simétrica asociada.

•(A) : Supongamos primero que $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{q} \leqslant \frac{m+1}{2m} - \frac{1}{p}$. Si $r := \frac{2mq}{(m+1)q-2m}$ entonces $2m \leqslant r \leqslant p$ y por la desigualdad de Hardy-Littlewood del Teorema 2.1.6 (ii), tenemos

$$|P|_q \ll \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \ll \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}.$$

Ahora supongamos que $\frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{2}$ y $\frac{m}{p} \leqslant 1 - \frac{1}{q}$. Dado $r := \frac{mq}{q-1}$ entonces $m \leqslant r \leqslant \min\{p, 2m\}$; luego razonando como antes (pero usando la parte (i) del Teorema 2.1.6) podemos llegar fácilmente a la misma conclusión.

•(B) : Tomando $p \leqslant r = \frac{mq}{q-1}$, gracias a la desigualdad de Hardy-Littlewood del Teorema 2.1.6 (i), y las cotas en (2.19) se sigue

$$|P|_q \ll \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \ll \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} n^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} = \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} n^{\frac{m}{p}+\frac{1}{q}-1}.$$

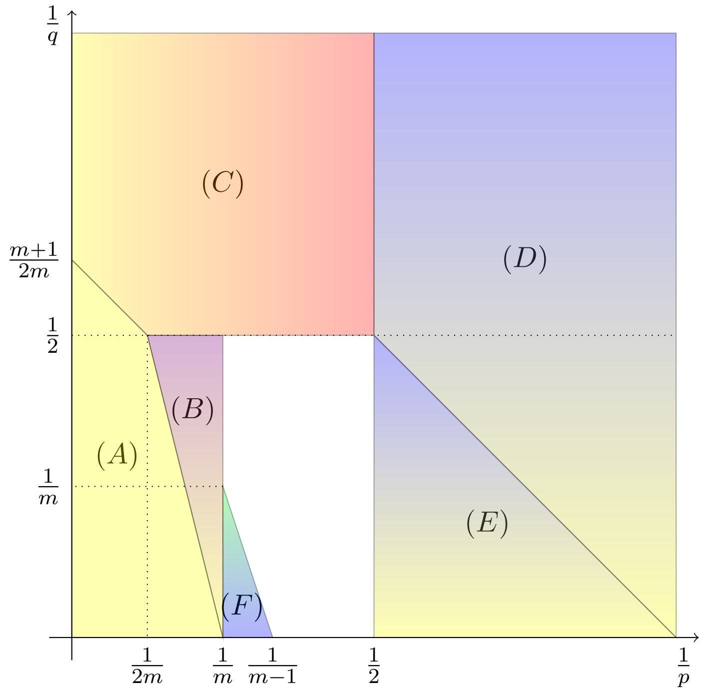

Figura 2.1: Resumen gráfico de las regiones descriptas en el Teorema 2.2.5.

Para la optimalidad podemos tomar el polinomio

$$P = \sum_{j=0}^{k-1} z_{mj+1} \cdots z_{mj+m}, \quad \text{con} \quad k = \left[\frac{n}{m}\right],$$

se puede ver usando multiplicadores de Lagrange y el hecho de que $p \geqslant m$, que

$$\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} = k\Big(\frac{1}{mk}\Big)^{\frac{m}{p}} \sim n^{1-\frac{m}{p}}.$$

Luego,

$$n^{\frac{1}{q}} \sim k^{\frac{1}{q}} = |P|_q \leqslant A_{p,q}^m(n)\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \sim A_{p,q}^m(n) n^{1-\frac{m}{p}},$$

y por lo tanto $n^{\frac{m}{p}+\frac{1}{q}-1} \ll A_{p,q}^m$.

$\bullet(C)$: Supongamos que $\frac{m+1}{2m} \leqslant \frac{1}{q}$ y $\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2}$. Usando la desigualdad de Bohnenblust-Hille en el Teorema 2.1.6, las cotas en (2.18) y (2.19) tenemos

$$\begin{aligned} |P|_q &\ll n^{m(\frac{1}{q}-\frac{m+1}{2m})}|P|_{\frac{2m}{m+1}} \ll n^{m(\frac{1}{q}-\frac{m+1}{2m})}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_\infty^n)} \\ &\ll n^{m(\frac{1}{q}-\frac{m+1}{2m})} n^{\frac{m}{p}} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} = n^{m(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}. \end{aligned}$$

Supongamos $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{q} \leqslant \frac{m+1}{2m} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ y $r := \frac{2mq}{(m+1)q-2m}$. Notemos que $\max\{2m, p\} \leqslant r$. Por la desigualdad de Hardy-Littlewood del Teorema 2.1.6 (ii) y las cotas en (2.19) tenemos

$$|P|_q \ll \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \ll n^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} = n^{m(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}.$$

Para mostrar que el comportamiento asintótico es óptimo, consideramos P un polinomio m-homogéneo unimodular como en (2.20). Luego, como $\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2}$

$$n^{\frac{m}{q}} \ll |P|_q \leqslant A_{p,q}^m(n)\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \ll A_{p,q}^m(n) n^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}}.$$

Por lo tanto,

$$n^{m(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} = n^{\frac{m}{q}-[m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}]} \ll A_{p,q}^m(n).$$

$\bullet(D)$: Si $T = \check{P}$ es la forma m-linear simétrica asociada a P, esta induce un operador $(m-1)$-linear $\tilde{T} \in \mathcal{L}(^{m-1}l_p^n; (l_p^n)^*)$, definido por

$$\tilde{T}(x_1, \ldots, x_{m-1})(\cdot) = T(x_1, \ldots, x_{m-1}, \cdot).$$

Luego

$$\begin{aligned}
|T|_q^q &= \sum_{i \in \mathcal{M}(m,n)} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^q \\
&= \sum_{i \in \mathcal{M}(m-1,n)} \sum_{l=1}^{n} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{m-1}}, e_l)|^q \\
&\leqslant \sum_{i \in \mathcal{M}(m-1,n)} (\sum_{l=1}^{n} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{m-1}}, e_l)|^{p'})^{\frac{q}{p'}} n^{\frac{q}{p}+1-q} \\
&\leqslant n^{m-1+\frac{r}{p}+1-q} \sup_{\|x_i\|_p \leqslant 1} \|\tilde{T}(x_1, \ldots, x_{m-1})\|_{p'}^q \\
&= n^{m+\frac{q}{p}-q}\|T\|_{\mathcal{L}(^m\ell_p^n)}^q,
\end{aligned}$$

donde en la primer desigualdad usamos la desigualdad de Hölder en el caso $\frac{p'}{q} \geqslant 1$. Luego por las desigualdades en (2.22) y (2.23) tenemos

$$|P|_q \ll n^{\frac{m}{q}+\frac{1}{p}-1}\|P\|_{\ell_p^n}.$$

Para la optimalidad, usamos los polinomios de Bayart. Como $1 \leqslant p \leqslant 2$, tracias a (2.20) existe un polinomio homogéneo y unimodular P tal que

$$n^{\frac{m}{r}} \ll |P|_r \leqslant A_{p,q}^m(n)\|P\|_{\mathcal{P}(\ell_p^n)} \ll A_{p,q}^m(n) n^{1-\frac{1}{p}}.$$

$\bullet(E)$: Observemos que

$$A_{p,q}^m(n) = \|id : \mathcal{P}(^m\ell_p^n) \to (\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_q)\|.$$

Así, si $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p'}$, para $0 < \theta < 1$, usando el Teorema 1.4.1 de interpolación multilineal concluimos que

$$A_{p,q}^m(n) \leqslant (A_{p,p'}^m(n))^\theta (A_{p,\infty}^m(n))^{1-\theta}.$$

Como $1 \leqslant p \leqslant 2$, tenemos por la parte (D) que $A_{p,p'}^m(n) \sim n^{\frac{m-1}{p'}}$ y además, aplicando la *fórmula integral de Cauchy* en la ecuación (1.12) deducimos que $A_{p,\infty}^m(n) \sim 1$. Por lo tanto,

$$\|id : \mathcal{P}(^m\ell_p^n) \to (\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_{p'})\| \ll n^{\frac{m-1}{p'}},$$
$$\|id : \mathcal{P}(^m\ell_p^n) \to (\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_{\infty})\| \ll 1$$

por el Teorema 1.4.1 y la ecuación (2.24) se obtiene

$$\|id : \mathcal{P}(^m\ell_p^n) \to (\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_q)\| = A_{p,q}^m(n) \leqslant A_{p,q}^m(n) \leqslant (A_{p,p'}^m(n))^\theta (A_{p,\infty}^m(n))^{1-\theta} \ll n^{\frac{m-1}{q}}.$$

Para la cota inferior, tomando un polinomio de Steiner $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ como en el Corolario 2.2.4 con sistema parcial de Steiner asociado de cardinal $\gg n^{m-1}$ y $1 \leqslant p \leqslant 2$, se sigue que

$$n^{\frac{m-1}{q}} \ll |P|_q \leqslant A_{p,q}^m(n)\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \ll A_{p,q}^m(n) \log^{\frac{3p-3}{p}}(n).$$

Tenemos entonces que para todo $\varepsilon > 0$, vale

$$n^{\frac{m-1}{q}-\varepsilon} \ll A_{p,q}^m(n).$$

•(F) : Sea $T = \check{P}$ la forma m-lineal simétrica asociada a P y, dado $1 \leqslant i \leqslant n$, consideremos $T_i \in \mathcal{L}(^{m-1}\mathbb{C}^n)$ definido como

$$T_i(x_2, \ldots, x_m) = T(e_i, x_2, \ldots, x_m).$$

Luego

$$\begin{aligned} |P|_q^q \sim |T|_q^q &= \sum_{i \in \mathcal{M}(m,n)} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^q \\ &= \sum_{i=1}^n |T_i|_q^q \\ &\ll \sum_{i=1}^n \|T_i\|_{\mathcal{L}(^{m-1}\ell_p^n)}^q \qquad (2.25) \\ &\leqslant n\|T\|_{\mathcal{L}(^m\ell_p^n)}^q \sim n\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}^q, \end{aligned}$$

donde usamos, en (2.25), el hecho de que $A_{p,q}^{m-1}(n) \sim 1$ para este rango de valores para p y q. Se sigue entonces que

$$|P|_q \ll n^{\frac{1}{q}}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}.$$

Para la cota inferior, sea $P = \sum_{j=1}^k z_{mj+1} \cdots z_{mj+m}$ como en la parte (B). Luego, como $p \geqslant m$ (en la región (F)), tenemos que $\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \sim 1$ y entonces

$$n^{\frac{1}{q}} \sim |P|_q \ll A_{p,q}^m(n)\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \sim A_{p,q}^m(n). \qquad \square$$

Para $2 \leqslant p \leqslant m$, $2 \leqslant q < \infty$ y $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}) \notin (F)$ podríamos haber usado interpolación (en dirección vertical, como hicimos en la prueba de la parte (E) del Teorema 2.2.5) para obtener cotas superiores efectivas para $A^m_{p,q}$. Elegimos no darlas explícitamente ya que estas estimaciones no son óptimas.

2.2.3. Estimaciones asintóticas para $B^m_{r,p}(n)$

Ahora presentaremos el comportamiento asintótico correcto para la constante $B^m_{r,p}(n)$ definida en el Problema 2.2.1. Éstas estimaciones serán útiles en la siguiente sección para las aplicaciones.

Proposición 2.2.6. *Sea $B^m_{r,p}(n)$ la más chica de las constantes para las que todo polinomio m-homogéneo en n variables complejas P cumple $\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \leqslant B^m_{r,p}(n)\ |P|_r$. Vale que*

$$B^m_{r,p}(n) \sim \begin{cases} 1 & \text{para } r \leqslant p', \\ n^{m(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{r})} & \text{para } r \geqslant p'. \end{cases}$$

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$ y $P = \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} a_\alpha z^\alpha$ un polinomio m-homogéneo en n variables. Supongamos primero que $r \leqslant p'$. Luego

$$\begin{aligned} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} &= \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} |\sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} a_\alpha z^\alpha| \\ &\leqslant \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} (\sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |a_\alpha|^{p'})^{\frac{1}{p'}} (\sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |z^\alpha|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant |P|_{p'} \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} (\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} |z_{\mathbf{i}}|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= |P|_{p'} \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} (\sum_{k=1}^n |z_k|^p)^{\frac{m}{p}} = |P|_{p'} \leqslant |P|_r. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $r \geqslant p'$,

$$\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \leqslant |P|_{p'} \leqslant |P|_r n^{m(\frac{1}{p'}-\frac{1}{r})} = |P|_r n^{m(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{r})}.$$

Para estudiar las cotas inferior tomemos el polinomio $P(z) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} z_{\mathbf{j}}$. Notemos que $|P|_r \sim n^{\frac{m}{r}}$ y

$$\begin{aligned} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} &= \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} |\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} z_{\mathbf{j}}| \\ &\geqslant |\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} n^{-\frac{m}{p}}| \qquad \text{tomando } z = \Big(\overbrace{\frac{1}{n^{1/p}}, \dots, \frac{1}{n^{1/p}}}^{m}\Big) \\ &\sim n^{m(1-\frac{1}{p})}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $B_{r,p}^m(n) \gg n^{m(1-\frac{1}{r}-\frac{1}{p})}$. $\square$

2.3. Algunas consecuencias de los resultados

Ahora presentaremos algunas aplicaciones de los resultados previos a dos problemas que, a primera vista, parecen estar desconectados de los desarrollos previos. El primer resultado involucra un problema dentro de la teoría de la interpolación compleja de espacios de Banach, el segundo es sobre la desigualdad de von Neumann que pertenece a la teoría de los operadores acotados en los espacios de Hilbert.

2.3.1. Interpolación compleja en espacios de polinomios

El siguiente es un problema dentro de la teoría de interpolación de espacios de polinomios homogéneos en espacios de Banach. Existe una relación extremadamente cercana entre los productos tensoriales de espacios de Banach y los polinomios homogéneos en esos espacios que elegimos no desarrollar en esta tesis. El lector interesado puede traducir los resultados de esta sección a resultados análogos para productos tensoriales de espacios Banach dotados de la norma inyectiva. Esto además puede encontrarse en [GMMb].

Dada una pareja compatible de espacios de Banach (X, Y) y $0 < \theta < 1$ podemos considerar dos nuevos espacios que pueden o no ser isomorfos

$$[\mathcal{P}(^m X), \mathcal{P}(^m Y)]_\theta \text{ y } \mathcal{P}(^m [X, Y]_\theta).$$

Defant y Michels en [DM00] y también Kouba en [Kou91] probaron resultados notables en la interpolación del producto tensorial inyectivo de espacios de Banach (ver también [DM03]). Estos resultados son mucho más generales, pero en particular implican que

$$[\mathcal{P}(^2\ell_{p_0}), \mathcal{P}(^2\ell_{p_1})]_\theta = \mathcal{P}(^2[\ell_{p_0}, \ell_{p_1}]_\theta), \tag{2.26}$$

para $0 < \theta < 1$, $2 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$. La ecuación (2.26) debe ser interpretada como una igualdad de espacios de Banach, lo que significa que hay un operador lineal acotado e inversible entre ambos espacios.

Mostraremos que el Teorema 2.2.5 implica que un enunciado similar no vale para el caso m-homogéneo cuando $m > 2$. De hecho, mostraremos que el siguiente problema tiene una respuesta negativa.

Problema 2.3.1. *Dado $m > 2$, $2 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$ y $0 < \theta < 1$, ¿existe algún isomorfismo de espacios de Banach entre $\mathcal{P}(^m[\ell_{p_0}, \ell_{p_1}]_\theta)$ y $[\mathcal{P}(^m\ell_{p_0}), \mathcal{P}(^m\ell_{p_1})]_\theta$?*

Como ya hemos señalado, para $m = 2$ la respuesta a la pregunta planteada en el Problema 2.3.1 es afirmativa. Es natural preguntarse si esto es posible para todos todo grado de homogeneidad $m \in \mathbb{N}$ sólo por el hecho de entender los espacios de polinomios homogéneos, pero también es interesante por sus posibles aplicaciones. En general entender los espacios de interpolación entre espacios de Banach concretos, sumado al Teorema 1.4.1, resulta en dispositivo sumamente poderoso para atacar varios problemas del análisis funcional.

Otra variante del Problema2.3.1 se expresa en el siguiente enunciado.

Problema 2.3.2. *Dado $m > 2$, $2 \leqslant p_0, p_1 \leqslant \infty$ y $0 < \theta < 1$, ¿existe algún isomorfismo de espacios de Banach $T : \mathcal{P}(^m[\ell_{p_0}, \ell_{p_1}]_\theta) \to [\mathcal{P}(^m\ell_{p_0}), \mathcal{P}(^m\ell_{p_1})]_\theta$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ induzca un isomorfismo lineal $T_n : \mathcal{P}(^m[\ell_{p_0}^n, \ell_{p_1}^n]_\theta) \to [\mathcal{P}(^m\ell_{p_0}^n), \mathcal{P}(^m\ell_{p_1}^n)]_\theta$?*

Claramente una respuesta negativa al Problema 2.3.1 da una respuesta negativa al Problema 2.3.2 ya que el isomorfismo del segundo problema tiene más requisitos. No daremos un tratamiento adecuado aquí, pero el lector interesado puede mirar el artículo [BM19] donde los autores prueban que el Problema 2.3.1 y el Problema 2.3.2 son en realidad equivalentes. Allí Bayart y Mastylo investigan la interpolación entre espacios de Banach de una manera más general y dan algunas aplicaciones al problema polinomial.

Una respuesta positiva a la pregunta planteada en el Problema 2.3.2 nos daría una herramienta para conocer los casos faltantes en el Teorema 2.2.5. Además muchos de los problemas que atacamos en esta tesis podrían ser resueltos de una forma más sencilla si esto fuera cierto.

Observación 2.3.3. Asumiendo una respuesta positiva al Problema 2.3.1 no es difícil completar todos los casos faltantes en el Teorema 2.2.5 (i.e., para $p \in [2, m]$ y $q \in [2, \infty]$). En este caso tendríamos,

$$\begin{cases} A^m_{p,q}(n) \sim n^{\frac{1}{q}} & \text{para } (\overline{F}) : \left[\frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2} \ \wedge\ \frac{1}{q} \leqslant \frac{m}{2-m} \cdot \frac{1}{p} + \frac{m}{2m-4}\right], \\ A^m_{p,q}(n) \ll n^{m(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{2})-\frac{1}{q}} & \text{para } (\overline{G}) : \left[\frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2} \ \wedge\ \frac{m}{2-m} \cdot \frac{1}{p} + \frac{m}{2m-4} \leqslant \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{2}\right], \end{cases}$$

Más aún, la potencia de n en $(\overline{G})$ no puede mejorarse.

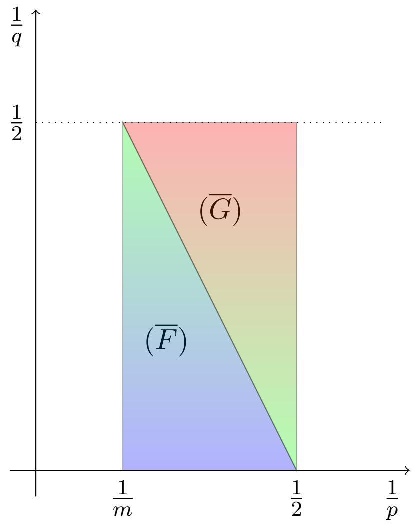

Figura 2.2: Resumen gráfico de los casos tratados en la Observación 2.3.3.

La anterior observación es una motivación concreta para investigar alrededor del Problema 2.3.1. No daremos una prueba de la Observación 2.3.3 ya que sabemos, como mostraremos debajo, que la pregunta planteada en este problema tiene una respuesta negativa.

De todas forma probaremos que las cotas inferiores coinciden con las dichas en la Observación 2.3.3. Para la región $(\overline{G})$ esta afirmación se puede probar utilizando polinomios de Steiner: tomemos un polinomio P como en el Teorema 2.2.3, luego

$$n^{\frac{m-1}{r}} \sim |P|_r \leqslant A^m_{p,r}(n)\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \ll A^m_{p,r}(n)\log(n)^{\frac{3}{p}} n^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \ll A^m_{p,r}(n) n^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})+\varepsilon},$$

para cada $\varepsilon > 0$. Tenemos entonces

$$n^{m(\frac{1}{r}+\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{1}{r}-\varepsilon} \ll A^m_{p,r}(n).$$

Para la región $(\overline{F})$ el mismo argumento usado en el Teorema 2.2.5 en la región (F), con el mismo polinomio, sirve.

Corolario 2.3.4. *La respuesta a la pregunta planteada en el Problema 2.3.1 es negativa en general. En particular, para $m \geqslant 3$, $q > m$, $(m-1)q' \leqslant p_1 < m$, $mq' \leqslant p_0$ y θ tal que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \leqslant m$, no existe un isomorfismo lineal*

$$T : \mathcal{P}(^m[\ell_{p_0}, \ell_{p_1}]_\theta) \to [\mathcal{P}(^m\ell_{p_0}), \mathcal{P}(^m\ell_{p_1})]_\theta,$$

que induzca isomorfismos lineales $T_n : \mathcal{P}(^m[\ell^n_{p_0}, \ell^n_{p_1}]_\theta) \to [\mathcal{P}(^m\ell^n_{p_0}), \mathcal{P}(^m\ell^n_{p_1})]_\theta$.

Demostración. Notemos que para una familia inducida de isomorfismos tenemos las siguientes cotas, $\|T_n\| \leqslant \|T\|$ y $\|T_n^{-1}\| \leqslant \|T^{-1}\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observemos también, en función de las regiones del Teorema 2.2.5, que $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q}) \in (A)$ y $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q}) \in (F)$ con $p_1 > m$, luego

$$\begin{aligned} \|id : \mathcal{P}(^m\ell^n_{p_0}) \to (\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_q)\| &= A^m_{p_0,q}(n) \leqslant C_{m,p_0,q}, \\ \|id : \mathcal{P}(^m\ell^n_{p_1}) \to (\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_q)\| &= A^m_{p_1,q}(n) \leqslant C_{m,p_1,q} n^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Usando el Teorema 1.4.1 de interpolación multilineal tenemos

$$\|id : [\mathcal{P}(^m\ell^n_{p_0}), \mathcal{P}(^m\ell^n_{p_1})]_\theta \to [(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_q), (\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n), |\cdot|_q)]_\theta\| \leqslant C^\theta_{m,p_0,q} C^{1-\theta}_{m,p_1,q} n^{\frac{1-\theta}{q}},$$

para todo $0 < \theta < 1$.

Asumiendo una respuesta afirmativa a la pregunta planteada en Problema 2.3.1 y usando el Teorema 1.4.1 de interpolación multilineal se sigue para, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\theta \in (0,1)$ y $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$, que

$$\begin{aligned} |P|_q &\ll n^{\frac{1-\theta}{q}} \|P\|_{[\mathcal{P}(^m\ell^n_{p_0}), \mathcal{P}(^m\ell^n_{p_1})]_\theta} \\ &\leqslant n^{\frac{1-\theta}{q}} \|T\| \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell^n_p)}, \end{aligned}$$

y luego

$$A^m_{p,q}(n) \ll n^{\frac{1-\theta}{q}}.$$

Eligiendo θ de forma que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \leqslant m$ tenemos $(p,q) \in (F)$, esto contradice la cota inferior para la región (F) en el Teorema 2.2.5 . $\square$

El Corolario 2.3.4 niega la existencia de un isomorfismo entre los espacios $\mathcal{P}({}^m[\ell_{p_0}, \ell_{p_1}]_\theta)$ y $[\mathcal{P}({}^m\ell_{p_0}), \mathcal{P}({}^m\ell_{p_1})]_\theta$ con alguna condición sobre p_0 y p_1. Esto incluye los valores de p_0 y p_1 que permitirían aplicar al interpolación compleja en la forma necesaria para obtener el resultado enunciado en la Observación 2.3.3. En [BM19, Theorem 3.10] los autores prueban que para estos valores tampoco existe tal isomorfismo. En particular prueban allí un teorema para una familia mayor de métodos de interpolación que, para el método de interpolación compleja, puede expresarse del siguiente modo

Teorema 2.3.5. *Para $m \geqslant 2$ y $2 \leqslant h \leqslant m$ dados $1 \leqslant p_1 < h < p_0$ y $0 < \theta < 1$ no existe isomorfismo de espacios de Banach entre $\mathcal{P}({}^m[\ell_{p_0}^n, \ell_{p_1}^n]_\theta)$ y $[\mathcal{P}({}^m\ell_{p_0}^n), \mathcal{P}(\ell_{p_1}^n)]_\theta)$.*

En [BPR18] los autores dan respuesta a preguntas similares al respecto de la interpolación compleja entre productos tensoriales de espacios de Banach.

2.3.2. La desigualdad multivariable de von Neumann

Una desigualdad clásica en la teoría de operadores, debida a von Neumann [vN51], afirma que si T es una contracción lineal en un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$ (i.e., su norma de operador es menor o igual que uno) entonces

$$\|P(T)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant \sup\{|P(z)| : z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant 1\},$$

para todo polinomio P en una variable compleja.

Usando la teoría de dilatación (ver [SN74]), Ando [And63] exhibió una desigualdad análoga para polinomios en dos contracciones que conmutan. Sin embargo, Varopoulos [Var74] demostró que la desigualdad de von Neumann no puede extenderse a tres o más contracciones que conmuten.

Es un problema abierto de gran interés en la teoría de operadores (ver por ejemplo [Ble01, Pis01]) determinar si existen constantes $K(n)$ que se se ajusten a las desigualdades de von Neumann. Más precisamente, no se sabe si existe o no una constante $K(n)$ tal que

$$\|P(T_1, \ldots, T_n)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant K(n) \sup\{|P(z_1, \ldots, z_n)| : |z_i| \leqslant 1\}, \tag{2.27}$$

para todo polinomio P en n variables y cada n-tupla $(T_1, \ldots, T_n)$ de contracciones que conmuten en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Dixon [Dix76] estudió la desigualdad multivariable de von Neumann restringida a polinomio homogéneos y, junto con Mantero [MT79], estudió algunas variaciones de este problema. Una de ellas es determinar el comportamiento asintótico de la mejor constante posible $c(n) = c_{m,p,q}(n)$ de forma que

$$\|P(T_1, \ldots, T_n)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant c(n)\|P\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_q^n)},$$

para toda n-tupla $(T_1, \ldots, T_n)$ de operadores que conmutan en un espacio de Hilbert satisfaciendo

$$\sum_{i=1}^{n} \|T_i\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}^p \leqslant 1, \tag{2.28}$$

y todo polinomio m-homogéneo en n variables, P. Algunas cotas inferior fueron probadas allí y también fueron dadas cotas superiores para el caso $p = q$. Usaremos el Teorema 2.2.5 y el Teorema 2.2.6 para mostrar cotas superiores para $c(n)$ para todo $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

Recordemos que dada una forma bilineal $a : X_1 \times X_2 \to \mathbb{C}$ su norma uniforme es

$$\|a\|_{Bil(X_1 \times X_2)} := \sup_{(x_1,x_2) \in B_{X_1} \times B_{X_2}} |a(x_1, x_2)|.$$

Necesiitaremos el siguiente lema de [MT79] que es una consecuencia fácil de la desigualdad de Grothendieck. Lo probaremos por completitud.

Lema 2.3.6. *Para $i = 1, \ldots, N$, $j = 1, \ldots, M$ sean x_i, y_j vectores en algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de modo que $\sum_{i=1}^N \|x_i\|_{\mathcal{H}}^p \leqslant 1$ y $\sum_{j=1}^M \|y_j\|_{\mathcal{H}}^p \leqslant 1$, y sea $(a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{C}^{N \times M}$. Entonces*

$$\left| \sum_{i,j} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| \leqslant K_G \|a\|_{Bil(\ell_p^N \times \ell_p^M)},$$

donde K_G denota a la constante de Grothendieck y a es la forma bilineal en $\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^M$ cuyos coeficientes son los a_{ij}'s.

Demostración.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j} a_{i,j} \langle x_i, y_j \rangle \right| &\leqslant \left| \sum_{i,j} a_{i,j} \|x_i\|_{\mathcal{H}} \|y_j\|_{\mathcal{H}} \langle \frac{x_i}{\|x_i\|_{\mathcal{H}}}, \frac{y_j}{\|y_j\|_{\mathcal{H}}} \rangle \right| \\ &\leqslant K_G \sup \{ \sum_{i,j} a_{i,j} \|x_i\|_{\mathcal{H}} \|y_j\|_{\mathcal{H}} \beta_i \gamma_j \ : \ \beta \in B_{\ell_\infty^N}, \gamma \in B_{\ell_\infty^M} \} \\ &\leqslant K_G \|a\|_{Bil(\ell_p^N \times \ell_p^M)}. \end{aligned}$$

□

Proposición 2.3.7. *Sean $T_1, \ldots, T_n$ operadores que conmutan en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ satisfaciendo* (2.28) *y $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$. Entonces*

$$\|P(T_1, \ldots, T_n)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant C A_{q,p'}^{m-1}(n) \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)},$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de n.

Demostración. Sean $a_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m, n)$ la sucesión de coeficientes de la forma m-linear simétrica a asociada a P, y x, y vectores de norma menor o igual a uno en $\mathcal{H}$. Notemos que también podemos ver a como una forma bilineal en $\mathbb{C}^{n^{m-1}} \times \mathbb{C}^n$, entonces, por el lema previo,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} a_{\mathbf{i}} \langle T_{i_1} \ldots T_{i_m} x, y \rangle \right| &= \left| \sum_{(\mathbf{i},j) \in \mathcal{M}(m-1,n) \times \{1,\ldots,n\}} a_{(\mathbf{i},j)} \langle T_{i_1} \ldots T_{i_{m-1}} x, T_j^* y \rangle \right| \\ &\leqslant K_G \|a\|_{Bil(\ell_p^{n^{m-1}} \times \ell_p^n)} \\ &= K_G \sup_{\beta \in B_{\ell_p^n}} \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m-1,n)} \left| \sum_{j=1}^n a_{(\mathbf{i},j)} \beta_j \right|^{p'} \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Observemos que $\sum_{j=1}^{n} a_{(\mathbf{i},j)}\beta_j$ son los coeficientes de una forma $(m-1)$-lineal a_β que se obtiene fijando one variable de a en β, esto es, $a_\beta(v_1,\ldots,v_{m-1}) = a(\beta,v_1,\ldots,v_{m-1})$. Además la norma p' de coeficientes de a_β es menor o igual que la norma p' de coeficientes del polinomio asociado P_β. Gracias al Teorema 1.2.7 tenemos $\|P_\beta\|_{\mathcal{P}(^{m-1}\ell_q^n)} \leqslant e\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)}$, luego tomando supremos sobre $x, y \in B_{\mathcal{H}}$ se sigue

$$\begin{aligned}\|P(T_1,\ldots,T_n)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} &\leqslant K_G \sup_{\beta\in B_{\ell_p^n}} A_{q,p'}^{m-1}(n)\|P_\beta\|_{\mathcal{P}(^{m-1}\ell_q^n)} \\ &\leqslant K_G e A_{q,p'}^{m-1}(n)\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)}. \qquad \square\end{aligned}$$

Observación 2.3.8. Tomando $p = q$ y usando el Teorema 2.2.5 recuperamos la desigualdad probada en [MT79], esto es, $c(n) \ll n^{\frac{m-2}{p'}}$ si $p \leqslant 2$ y $c(n) \ll n^{\frac{m-2}{2}}$ si $p \geqslant 2$.

Tenemos también el siguiente corolario.

Corolario 2.3.9. *Sean $T_1,\ldots,T_n$ operadores que conmutan en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ satisfaciendo* (2.28). *Si* $[\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{p'} \leqslant \frac{m}{2(m-1)} - \frac{1}{q}]$ *o* $[\frac{1}{p'} \leqslant \frac{1}{2} \wedge \frac{m-1}{q} \leqslant 1 - \frac{1}{p'}]$, *luego*

$$\|P(T_1,\ldots,T_n)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant D\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)},$$

para todo polinomio m-homogéneo P, donde $D > 0$ es una constante independiente de n.

Otra variante estudiada en [MT79] es determinar la mejor constante posible $d(n) = d_{m,p,q}(n) > 0$ tal que

$$\|P(T_1,\ldots,T_n)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant d(n)\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)},$$

para todo polinomio m-homogéneo en n variables complejas P, y toda n-tupla $(T_1,\ldots,T_n)$ de operadores que conmutan en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ satisfaciendo

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\langle T_i x, y\rangle|^p\right)^{1/p} \leqslant \|x\|_{\mathcal{H}}\|y\|_{\mathcal{H}}, \tag{2.29}$$

para todo par de vectores $x, y \in \mathcal{H}$. Notemos que (2.29) es equivalente a que $\|\sum_{i=1}^{n} T_i\beta_i\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant \|\beta\|_{p'}$, para todo $\beta \in \mathbb{C}^n$.

Lema 2.3.10. *Sean $T_1,\ldots,T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ operadores que conmutan satisfaciendo* (2.29) *y $x, y \in \mathcal{H}$. Entonces, si Q es el polinomio m-homogéneo en n variables definido por*

$$Q(z) = \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \langle T_{i_1}\ldots T_{i_m}x, y\rangle z_{i_1}\ldots z_{i_m},$$

tenemos $\|Q\|_{\mathcal{P}(^m\ell_{p'}^n)} \leqslant \|x\|_{\mathcal{H}}\|y\|_{\mathcal{H}}$.

Demostración. Gracias a un simple cálculo se sigue que

$$\begin{aligned}
\|Q\|_{\mathcal{P}(^m\ell_{p'}^n)} &= \sup_{z\in B_{\ell_{p'}^n}} \left| \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \langle T_{i_1}\dots T_{i_m}x,y\rangle z_{i_1}\dots z_{i_m} \right| \\
&= \sup_{z\in B_{\ell_{p'}^n}} \left| \left\langle \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} T_{i_1}\dots T_{i_m} z_{i_1}\dots z_{i_m}x,y \right\rangle \right| \\
&\leqslant \sup_{z\in B_{\ell_{p'}^n}} \left| \left\langle \left(\sum_{l=1}^n z_l T_l\right)^m x,y \right\rangle \right| \leqslant \sup_{z\in B_{\ell_{p'}^n}} \left\| \sum_{l=1}^n z_l T_l \right\|^m \|x\|_{\mathcal{H}}\|y\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|x\|_{\mathcal{H}}\|y\|_{\mathcal{H}}. \ \square
\end{aligned}$$

Proposición 2.3.11. *Sean $T_1,\dots,T_n$ operadores que conmutan en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ satisfaciendo* (2.29) *y $P\in\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$. Entonces*

$$\|P(T_1,\dots,T_n)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant A_{q,r}^m(n)A_{p',r'}^m(n)\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)}.$$

Demostración. Sean $(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)}$ la sucesión de coeficientes de la forma m-linear simétrica a asociada a P, x,y vectores en la bola de $\mathcal{H}$. Gracias al lema previo y al hecho de que la norma r de los coeficientes de a es menor o igual que la norma r de los coeficientes de su polinomio asociado P, tenemos

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} a_{\mathbf{i}}\langle T_{i_1}\dots T_{i_m}x,y\rangle \right| &\leqslant \left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} |a_{\mathbf{i}}|^r \right)^{1/r} \left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} |\langle T_{i_1}\dots T_{i_m}x,y\rangle|^{r'} \right)^{1/r'} \\
&\leqslant A_{q,r}^m(n)\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)}A_{p',r'}^m(n). \qquad \square
\end{aligned}$$

Observación 2.3.12. Tomando $p=q=r'$ y usando el Teorema 2.2.5 recuperamos la desigualdad probada en [MT79, Proposition 20], esto es, $d(n) \ll n^{(m-1)(\frac{1}{p'}+\frac{1}{2})}$ si $p\leqslant 2$ y $d(n) \ll n^{(m-1)(\frac{1}{p}+\frac{1}{2})}$ si $p\geqslant 2$. Notemos también que, en la última proposición, tenemos cotas que no dependen de n para algunas combinaciones de p y q, e.g. para $(p,q)=(1,\infty)$.

Capítulo 3

Convergencia Monomial

Un resultado clásico en el análisis de una variable compleja, y posiblemente el más importante de la teoría, dice que toda función holomorfa puede ser representada localmente como una serie de potencias. Más precisamente, para una función $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa en un conjunto abierto U del plano complejo y $z_0 \in U$ existen $r = r(z_0) > 0$ y una sucesión $(c_m)_{m \geqslant 1} \subset \mathbb{C}$ de forma que

$$f(z) = \sum_{m \geqslant 1} c_m (z - z_0)^m + f(z_0),$$

para todo $z \in B_r(z_0)$. Este hecho vale también para funciones holomorfas en conjuntos abiertos de $\mathbb{C}^n$ como puede verse en el Teorema 1.3.3.

Hay una generalización de este hecho a espacios de dimensión infinita. Dado un conjunto U abierto en un espacio de Banach X y una función holomorfa $f : U \subset X \to \mathbb{C}$, para cada $z_0 \in U$ existen polinomios m-homogéneos $P_m = P_m(f, z_0) \in \mathcal{P}(^m X)$ tales que

$$f(z) = \sum_{m \geqslant 1} P_m(z - z_0) + f(z_0), \tag{3.1}$$

par todo z en un vecindario de z_0.

Esta es la única descripción que podemos esperar en el sentido de la serie Taylor para una función holomorfa en infinitas variables en general. Sin embargo alguna estructura extra en el espacio en donde la función esta definida podría permitirnos una nueva descripción. La estructura de espacio de sucesiones es exactamente lo que necesitamos para definir los monomios, los cuales nos permitirán otro punto de vista.

3.1. Definiciones y primeros resultados

Dado un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ y un espacio de sucesiones X podemos pensar en el monomio definido por α como la función

$$\begin{aligned} (\cdot)^\alpha : X &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z^\alpha. \end{aligned}$$

Esta función es un polinomio m-homogéneo en X pero no todo polinomio m-homogéneo es un monomio ni una combinación lineal finita de ellos. Por ejemplo, consideremos el funcional lineal

$$\begin{aligned} \ell_1 &\to \mathbb{C} \\ z &\to \sum_{k\geqslant 1} z_k, \end{aligned}$$

el cual claramente no es una combinación lineal finita de monomios pero, sin embargo, es un límite de combinaciones lineales finitas de ellos. Es natural preguntarnos si esto es un hecho general. Ahora daremos un sentido riguroso a esta pregunta y la generalizaremos al caso de funciones holomorfas.

Sea f una función holomorfa en algún dominio de Reinhardt $\mathcal{R}$ en un espacio de sucesiones X. Fijado $n \in \mathbb{N}$, la restricción de f a $\mathcal{R}_n = \mathcal{R} \cap \mathbb{C}^n$ (que es también un dominio de Reinhardt) es holomorfa y, por lo tanto por el Teorema 1.3.3 tiene una *expansión monomial* con coeficientes $(a_\alpha^{(n)}(f))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n}$, i.e.,

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} a_\alpha^{(n)}(f) z^\alpha,$$

para cada $z \in \mathcal{R}_n$. Usando que $\mathcal{R}_n \subset \mathcal{R}_{n+1}$ y la unicidad de los coeficientes en la serie de potencias para finitas variables es fácil ver que $a_\alpha^{(n)}(f) = a_\alpha^{(n+1)}(f)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n \subset \mathbb{N}_0^{n+1}$. En otras palabras, tenemos una única sucesión $\left(a_\alpha(f)\right)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$, tal que

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha \tag{3.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $z \in \mathcal{R}_n$. Esta serie de potencias es llamada la *expansión en serie monomial* o simplemente *expansión monomial* de f. A veces será conveniente describir esta expansión monomial en términos de la escritura alternativa para los monomios $\{z_{\mathbf{j}} : \mathbf{j} \in \mathcal{J}\}$ donde $\mathcal{J} = \cup_{m\in\mathbb{N}_0}\mathcal{J}(m)$. En estos casos notaremos $c_{\mathbf{j}}(f) = a_\alpha(f)$ cuando $\mathbf{j} = F(\alpha)$ (ver (1.6)).

Problema 3.1.1. *Dada un función holomorfa f en un dominio de Reinhardt $\mathcal{R}$ dentro de un espacio de sucesiones X, surgen varias preguntas.*

(1) ¿Es verdad que $f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha$ para todo $z \in \mathcal{R}$?

(2) Si no es así, dada una familia de funciones holomorfas en $\mathcal{R}$, ¿podemos describir los conjuntos

$$\left\{ z \in \mathcal{R} : f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha \text{ para toda } f \text{ en la familia} \right\} ?$$

Primero es necesario dar un sentido preciso a la expresión $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha$ cuando z no tenga soporte finito. No existe un orden natural en el conjunto $\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, además quisiéramos que el valor de la suma no dependa de algún orden artificial. Decimos que $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha$ converge a algún elemento si la convergencia es incondicional, o equivalentemente, si la convergencia es absoluta.

Podríamos esperar que, en las configuraciones donde los enfoques dados por la ecuación (3.1) y la ecuación (3.2) coexisten, sean equivalentes (al igual que en la versión finito dimensional), pero este no es el caso. Mientras trataba con un problema totalmente diferente, relacionado a la convergencia de series de Dirichlet, Toeplitz encontró un ejemplo de función holomorfa en c_0 y un punto en dicho espacio para el cual la expansión monomial de esta función no converge absolutamente. Esto muestra que hay funciones holomorfas para las cuales su descripción monomial es mala (lo contrario, sin embargo, es cierto: cada función que pueda ser descrita por su expansión monomial será holomorfa).

Dentro de la teoría del análisis complejo en una variable, la convergencia absoluta de series de potencias juega un rol importante a la hora de determinar el radio de convergencia, aquí será crucial también. Además la naturaleza incondicional de la convergencia implica que $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha \in \mathbb{C}$ es convergente si y sólo si converge absolutamente, ya que estos dos conceptos son equivalentes en $\mathbb{C}$. Con esto en mente la siguiente pregunta surge naturalmente: dada una familia de funciones holomorfas ¿para cuáles z's la expansión monomial converge absolutamente para todas las funciones dentro de la familia? De la ecuación (3.2) sabemos que esto sucede para todo $z \in \mathcal{R}_n$ pero, ¿podemos describir el conjunto maximal para que esto suceda? Ryan mostró en [Rya87] que la expansión monomial para toda función holomorfa en ℓ_1 converge en todo $z \in \ell_1$. Más tarde, Lempert en [Lem99] probó que la expansión monomial para toda función holomorfa en ρB_{ℓ_1} (con $\rho > 0$) converge en todo $z \in \rho B_{\ell_1}$. Esto es de algún modo un caso extremo, donde el enfoque analítico y el diferencial coinciden. ¿Qué sucede en otros espacios o si consideramos familias más pequeñas de funciones holomorfas? Para lidiar con esta pregunta fue definido en [DMP09] el conjunto de convergencia monomial para una función holomorfa dada. Sea $\mathcal{R}$ un dominio de Reinhardt dentro de algún espacio de sucesiones X y f una función holomorfa en $\mathcal{R}$, el *conjunto de convergencia monomial* para f es

$$mon f := \Big\{ z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(f) z^\alpha| < \infty \Big\},$$

i.e., aquellos elementos de $\mathcal{R}$ para los cuales la serie de potencias de f converge absolutamente. Para una *familia de funciones holomorfas* en $\mathcal{R}$ llamada $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ su conjunto de convergencia monomial es

$$mon \mathcal{F}(\mathcal{R}) := \Big\{ z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} \big|a_\alpha(f) z^\alpha\big| < \infty \ \text{ para cada } f \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \Big\}.$$

Hay muchas familias de funciones holomorfas para las cuales es interesante encontrar su conjunto de convergencia monomial. Dado un espacio de sucesiones X las siguientes familiar son las más naturales para estudiar en este sentido:

- $\mathcal{P}(^mX)$, los polinomios m-homogéneos en X.
- $\mathcal{A}_u(B_X)$, el álgebra de Banach de todas las funciones holomorfas uniformemente continuas en la bola unidad de X.
- $H_\infty(B_X)$, el espacio de Banach dado por las funciones holomorfas en la bola de X que también son acotadas allí.
- $H_b(X)$, el espacio de Fréchet de la funciones enteras en X que además son acotadas en los conjuntos acotados de X.

Sea $f : \mathcal{R} \subset X \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en un dominio de Reinhardt $\mathcal{R}$ de un espacio de sucesiones X. Tiene sentido calcular $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} \left|a_\alpha(f)z^\alpha\right|$ para todo $z \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, aún si f no está definida fuera de $\mathcal{R}$ y $z \notin \mathcal{R}$. Por otro lado la condición $f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f)z^\alpha$ tiene significado sólo para $z \in \mathcal{R}$. Luego en general, dada $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ una familia de funciones holomorfas, $mon\mathcal{F}(\mathcal{R})$ no es exactamente el conjunto

$$\Big\{z \in \mathcal{R} : f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f)z^\alpha \ \text{ para todo } f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})\Big\}.$$

De todos modos para muchos espacios de sucesiones naturales y familias de funciones holomorfas en dominios de Reinhardt en esos espacios estos dos conjuntos coinciden. En particular esto es cierto para aquellas familias en las que nos enfocamos en esta tesis.

Proposición 3.1.2. *Dados $1 < p, q \leqslant \infty$, para $X = \ell_{p,q}$ vale que*

$$mon\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \Big\{z \in \mathcal{R} : f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f)z^\alpha \ \textit{ para todo } f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})\Big\},$$

con $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ siendo $H_b(X), H_\infty(B_X)$ o $\mathcal{P}(^mX)$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Damos una prueba de la Proposición 3.1.2 en el Apéndice A.

Daremos ahora una serie de resultados básicos para los conjuntos de convergencia monomial. Un hecho simple pero muy útil es que dada dos familias de funciones holomorfas $\mathcal{F}_1(\mathcal{R}) \subset \mathcal{F}_2(\mathcal{R})$ en cierto dominio de Reinhardt $\mathcal{R}$ tenemos

$$mon\mathcal{F}_2(\mathcal{R}) \subset mon\mathcal{F}_1(\mathcal{R}). \tag{3.3}$$

Para un dominio de Reinhardt acotado $\mathcal{R}$ en un espacio de sucesiones X, $H_\infty(\mathcal{R})$ es la familia de funciones holomorfas y acotadas en $\mathcal{R}$. Recordemos que $H_\infty(\mathcal{R})$ es un espacio de Banach con la norma dada por $\|f\|_\mathcal{R} = \sup_{z\in\mathcal{R}} |f(z)|$ para cada $f \in H_\infty(\mathcal{R})$. Dada una subfamilia $\mathcal{F}(\mathcal{R}) \subset H_\infty(\mathcal{R})$ decimos que $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ es cerrado en $H_\infty(\mathcal{R})$ cuando sea un subespacio cerrado con esa norma.

Observación 3.1.3. Dado un dominio de Reinhardt acotado $\mathcal{R}$, una familia cerrada $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ en $H_\infty(\mathcal{R})$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, el operador lineal

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{R}) &\to \mathbb{C} && (3.4)\\ f &\mapsto a_\alpha(f), && (3.5) \end{aligned}$$

es acotado.

Demostración. Observemos que para $f \in H_\infty(\mathcal{R})$ y fijado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, gracias al Teorema 1.3.3, tenemos

$$a_\alpha(f) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\xi_n|=\rho_n} \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{(\xi_1 - z_1)^{\alpha_1+1} \cdots (\xi_n - z_n)^{\alpha_n+1}} d\xi,$$

con $\rho_1\mathbb{D} \times \cdots \times \rho_n\mathbb{D} \subset \mathcal{R}$. Se sigue entonces que

$$|a_\alpha(f)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n \prod_{k=1}^n \rho_k^{\alpha_k}} \|f\|_{\rho_1\mathbb{D}\times\cdots\times\rho_n\mathbb{D}} \leqslant C(\alpha)\|f\|_{\mathcal{R}}. \qquad \square$$

Para una familia cerrada $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ en $H_\infty(\mathcal{R})$ la siguiente equivalencia es una herramienta poderosa que traduce el hecho de que un elemento este en el conjunto $mon\mathcal{F}(\mathcal{R})$ a una desigualdad sobre toda la familia.

Proposición 3.1.4. *Dado un dominio acotado de Reinhardt $\mathcal{R}$ en un espacio de sucesiones X y $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ una subfamilia cerrada de $H_\infty(\mathcal{R})$ las siguiente afirmaciones son equivalentes:*

- $z \in mon\mathcal{F}(\mathcal{R})$.
- *Existe una constante $C_z > 0$ tal que*

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(f)z^\alpha| \leqslant C_z\|f\|_{\mathcal{R}}, \qquad (3.6)$$

  para todo $f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$.

Demostración. Dado $z \in \mathcal{R}$ cumpliendo (3.6) claramente se tiene que $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(f)z^\alpha| < \infty$ para toda $f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$. Para la otra implicación consideremos el operador lineal

$$\begin{aligned} \Phi_z : \mathcal{F}(\mathcal{R}) &\to \ell_1\left(\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\right)\\ f &\mapsto (a_\alpha(f)z^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}, \end{aligned}$$

que esta bien definido ya que $z \in mon\mathcal{F}(\mathcal{R})$. Para $f_n \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ tal que $f_n \to f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ y $\Phi_z(f_n) \to b = (b_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ tenemos, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, que $a_\alpha(f_n) \to b_\alpha$. Por la Observación 3.1.3 se tiene $a_\alpha(f_n) \to a_\alpha(f)$, y debido a la unicidad del límite $b = \Phi_z(f)$ el gráfico de Φ_z es cerrado. Como $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ es una subfamilia cerrada de $H_\infty(\mathcal{R})$ y $H_\infty(\mathcal{R})$ es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ es también Banach. Usando el teorema del gráfico cerrado para espacios de Banach se sigue que Φ_z esta acotada, que es lo que queríamos. $\square$

Dado cualquier $m \in \mathbb{N}$ el espacio $\mathcal{P}(^m X)$ es una subfamilia cerrada de $H_\infty(B_X)$ para todo espacio de sucesiones X. Este también es el caso para $\mathcal{A}_u(B_X)$. Por otro lado, aunque tengamos la inclusión como conjuntos $H_b(X) \subset H_\infty(B_X)$, $H_b(X)$ no es un subespacio cerrado de $H_\infty(B_X)$. En el Capítulo 6 necesitaremos y daremos una nueva versión de la Proposición 3.1.4 para el caso de $H_b(X)$.

Ahora presentaremos un punto de vista que jugará un rol muy importante en la descripción de los conjuntos de convergencia monomial para ciertas familias de funciones holomorfas en términos de subfamilias de $H_\infty(B_{\ell_\infty})$. Sea $\mathcal{R}$ un dominio de Reinhardt acotado y $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ una subfamilia cerrada de $H_\infty(\mathcal{R})$. Dado $f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ y $w \in \mathcal{R}$ definimos $f_w \in H_\infty(B_{\ell_\infty})$ como $f_w(z) = f(w \cdot z)$.

Observación 3.1.5. Para todo dominio de Reinhardt $\mathcal{R}$ y todo $w \in \mathcal{R}$ se tiene

$$\|f_w\|_{B_{\ell_\infty}} \leqslant \|f\|_{\mathcal{R}},$$

y $a_\alpha(f_w) = a_\alpha(f) w^\alpha$.

Demostración. Notemos que dado $w \in \mathcal{R}$ y $z \in B_{\ell_\infty}$ se tiene que $w \cdot z \in \mathcal{R}$ ya que $|(w \cdot z)_k| = |w_k||z_k| \leqslant |w_k|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego por definición se sigue que

$$\|f_w\|_{B_{\ell_\infty}} = \sup_{z \in B_{\ell_\infty}} |f_w(z)| = \sup_{z \in B_{\ell_\infty}} |f(w \cdot z)| \leqslant \sup_{u \in \mathcal{R}} |f(u)| = \|f\|_{\mathcal{R}}.$$

Fijemos $n \in \mathbb{N}$, para $z \in \mathcal{R}_n$ vale que $w \cdot z \in \mathcal{R}_n$ y luego

$$f_w(z) = f(w \cdot z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha(f)(w \cdot z)^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha(f) w^\alpha z^\alpha.$$

Por la unicidad de la expansión monomial en finitas variables complejas tenemos que

$$a_\alpha(f_w) = a_\alpha(f) w^\alpha,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y todo $n \in \mathbb{N}$, luego vale para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$. $\square$

Dado un dominio de Reinhardt $\mathcal{R}$ en un espacio de sucesiones X y fijado un elemento $w \in \mathcal{R}$ se sigue que

- Si $\mathcal{R} = X$ y $f \in H_b(X)$ entonces $f_w \in H_b(\ell_\infty)$.
- Si $\mathcal{R}$ acotado y $f \in H_\infty(\mathcal{R})$ entonces $f_w \in H_\infty(B_{\ell_\infty})$.
- Si $\mathcal{R} = X$ y $P \in \mathcal{P}(^m X)$ entonces $P_w \in \mathcal{P}(^m \ell_\infty)$.

Dada una familia de funciones holomorfas $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ en un dominio de Reinhardt $\mathcal{R}$ definimos

$$[\mathcal{F}(\mathcal{R})]_\infty := \{f_w : \text{ para todo } w \in \mathcal{R} \text{ y todo } f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})\}.$$

Observemos que valen las inclusiones $[H_b(X)]_\infty \subset H_b(\ell_\infty)$, $[H_\infty(\mathcal{R})]_\infty \subset H_\infty(B_{\ell_\infty})$ y $[\mathcal{P}(^m X)]_\infty \subset \mathcal{P}(^m \ell_\infty)$.

Lema 3.1.6. *Para todo dominio de Reinhardt $\mathcal{R}$ y toda familia de funciones holomorfas $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ se tiene*

$$\mathcal{R} \cdot mon[\mathcal{F}(\mathcal{R})]_\infty \subset mon\mathcal{F}(\mathcal{R}).$$

Demostración. Dado $w \in \mathcal{R}$ y $f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ vale que $f_w \in [\mathcal{F}(\mathcal{R})]_\infty$. Entonces, como $a_\alpha(f_w) = a_\alpha(f)w^\alpha$, dado $z \in mon[\mathcal{F}(\mathcal{R})]_\infty$ se sigue que

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(f)(wz)^\alpha| = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(f)w^\alpha z^\alpha| = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(f_w)z^\alpha| < \infty. \qquad \square$$

3.2. Algunas caracterizaciones

La única familia de funciones holomorfas para la cual el conjunto de convergencia monomial es conocido para todo espacio de sucesiones es la dada por su espacio dual, como se presenta en la ecuación (A.0.3). En general es difícil tener descripciones acabadas de estos conjuntos en términos de algún espacio o conjunto conocido. Como destacamos antes, los esfuerzos de Ryan [Rya87] y Lempert [Lem99] juntos dieron el primer resultado que caracteriza el conjunto de convergencia monomial de una familia de funciones holomorfas en un espacio de sucesiones (que no sea la dada por su espacio dual). El siguiente teorema es un corolario de esas investigaciones.

Teorema 3.2.1. *Para todo $\rho > 0$ se tiene que $monH_\infty(\rho B_{\ell_1}) = \rho \cdot B_{\ell_1}$. También para casa $m \in \mathbb{N}$ se tiene $\mathcal{P}(^m\ell_1) = \ell_1$.*

Para el otro del extremo del rango para espacio de Lorentz de sucesiones en [BDF+17] los autores prueban los siguientes dos teoremas. El primer resultado describe exactamente el conjunto de convergencia monomial de los polinomios homogéneos en ℓ_∞.

Teorema 3.2.2. *Dado $m \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$mon\mathcal{P}(^m\ell_\infty) = \ell_{\frac{2m}{m-1},\infty}.$$

Más aún, existe una constante universal $C > 0$ de forma que, para todo $z \in \ell_{\frac{2m}{m-1},\infty}$ y todo $P \in \mathcal{P}(^m\ell_\infty)$, vale

$$\sum_{\alpha \in \Lambda(m)} |a_\alpha(P)z^\alpha| \leqslant C^m \|z\|^m_{\ell_{\frac{2m}{m-1},\infty}} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_\infty)}.$$

Para el próximo resultado necesitamos considerar el conjunto

$$B := \left\{ z \in B_{\ell_\infty} : \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\log(n)}} \left(\sum_{k=1}^n (z_k^*)^2 \right)^{1/2} < 1 \right\},$$

y su clausura

$$\overline{B} = \left\{ z \in B_{\ell_\infty} : \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\log(n)}} \left(\sum_{k=1}^n (z_k^*)^2 \right)^{1/2} \leqslant 1 \right\}.$$

En el caso de $H_\infty(B_{\ell_\infty})$ el siguiente teorema es una caracterización muy ajustada de su conjunto de convergencia monomial.

Teorema 3.2.3. $B \subset monH_\infty(B_{\ell_\infty}) \subset \overline{B}$.

La última descripción conocida para estos conjuntos, en términos de espacios clásicos, es el conjunto de convergencia monomial para la familia de polinomios homogéneos en $\ell_{r,\infty}$. En [BDS19] los autores prueban que, para $r \leqslant 2 \leqslant \infty$, vale

$$mon\mathcal{P}(^m\ell_{r,\infty}) = \ell_{\left(\frac{m-1}{2m}+\frac{1}{r}\right)^{-1},\infty}. \tag{3.7}$$

Este hecho aparece también mencionado en [DMP09] sin una prueba explícita y una demostración más detallada puede encontrarse en la tesis doctoral de Schlüters [Sch15] .

Para $H_\infty(B_{\ell_r})$ con $1 < r < \infty$ las cotas superior e inferior para conjuntos de convergencia monomial tienen entre sí una "distancia mayor". En [DMP09, Example 4.9 (a)] los autores dan el primer resultado en pos de una caracterización del conjunto de convergencia monomial de estas familias, dado $\varepsilon > 0$ prueban que

- Para $1 \leqslant r < 2$
$$\ell_1 \cap B_{\ell_r} \subset monH_\infty(B_{\ell_r}) \subset \ell_{1+\varepsilon} \cap B_{\ell_r}. \tag{3.8}$$

- Para $2 \leqslant r$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{r}$
$$\ell_q \cap B_{\ell_r} \subset monH_\infty(B_{\ell_r}) \subset \ell_{q+\varepsilon} \cap B_{\ell_r}. \tag{3.9}$$

Más tarde, en [BDS19, Theorem 5.5], aparece el siguiente refinamiento en las cotas inferiores

- Para $1 < r \leqslant 2$ y $\theta > \frac{1}{2}$
$$\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{r'}} \log(n+2)^{\frac{\theta}{r'}}}\right) \cdot B_{\ell_r} \subset monH_\infty(B_{\ell_r}). \tag{3.10}$$

- Para $2 \leqslant r < \infty$ y $\theta > 0$
$$\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{r'}} \log(n+2)^{\frac{\theta}{r'}}}\right) \cdot B_{\ell_r} \subset monH_\infty(B_{\ell_r}). \tag{3.11}$$

En la siguiente sección presentamos una descripción general de una muy importante propiedad que alguna familias de funciones holomorfas tienen: la *propiedad de reordenamiento*. También probamos que las familias de funciones holomorfas más naturales tienen esta propiedad.

3.3. Familias de reordenamiento

Una herramienta muy útil en el estudio de los conjuntos de convergencia monomial (ver [BDF$^+$17]) es el hecho de que, usualmente, una sucesión pertenece al conjunto de convergencia monomial si y sólo si su reordenamiento decreciente lo cumple (ver también [DGMPG08]). Aislamos esta propiedad, y decimos que en este caso $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ es una *familia de reordenamiento*. En [BDF$^+$17] se prueba que $H_\infty(B_{c_0})$ y $\mathcal{P}({}^m c_0)$ son familias de reordenamiento. El hecho de que esto vale también para ℓ_r con $1 \leqslant r < \infty$ es implícitamente usado en [BDS19].

Nuestro objetivo es encontrar otras familias de reordenamiento (en [Sch15, Chapter 7] aparece un resultado similar). Con este propósito introducimos un nuevo concepto. Decimos que una familia $\mathcal{F} \subset H(\mathcal{R})$ es *linealmente balanceada* si $f \circ T|_{\mathcal{R}} \in \mathcal{F}$ para todo $f \in \mathcal{F}$ y todo $T : X \to X$ lineal con $\|T\| = 1$ y $T(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

Observación 3.3.1. Argumentos bastante directos muestran que $H_b(X)$, $\mathcal{A}_u(B_X)$, $H_\infty(B_X)$ y $\mathcal{P}({}^m X)$ para todo $m \geqslant 2$ son familias linealmente balanceadas.

Teorema 3.3.2. *Sea $\mathcal{R}$ un dominio de Reinhardt simétrico en un espacio de sucesiones X y $\mathcal{F} \subset H(\mathcal{R})$ una familia linealmente balanceada tal que $mon\mathcal{F} \subset c_0$, entonces $\mathcal{F}$ es una familia de reordenamiento.*

Ahora daremos una serie de resultados preliminares necesarios para la demostración del Teorema 3.3.2. Dada una función inyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definimos dos aplicaciones de la siguiente manera. Primero

$$\begin{aligned} T_\sigma : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} &\to \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ x &\mapsto (x_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}} . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Segundo, $S_\sigma : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ se define para $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ como

$$(S_\sigma x)_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \sigma(\mathbb{N}) \\ x_{\sigma^{-1}(k)} & \text{si } k \in \sigma(\mathbb{N}). \end{cases} \tag{3.13}$$

Ambas son claramente lineales y $T_\sigma(S_\sigma x) = x$ para todo x.

Observación 3.3.3. Veamos cómo estos dos operadores se comportan con el reordenamiento decreaciente de una sucesión acotada x. Fijado $n \in \mathbb{N}$ y $J \subset \mathbb{N}$ de forma que $card(J) < n$ tenemos que

$$\sup_{\sigma(j)\in\mathbb{N}\setminus J} |x_{\sigma(j)}| = \sup_{j\in(\mathbb{N}\setminus J)\cap\sigma(\mathbb{N})} |x_j| \leqslant \sup_{j\in\mathbb{N}\setminus J} |x_j| .$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \big(T_\sigma(x)\big)^*_n &= \text{ínf}\{ \sup_{\sigma(j)\in\mathbb{N}\setminus J} |x_{\sigma(j)}| : J \subset \mathbb{N}, \text{card}(J) < n\} \\ &\leqslant \text{ínf}\{ \sup_{j\in\mathbb{N}\setminus J} |x_j| : J \subset \mathbb{N}, \text{card}(J) < n\} = x^*_n. \end{aligned}$$

Esto es, $T_\sigma(x)^* \leqslant x^*$. Un argumento similar muestra que $(S_\sigma x)^* = x^*$.

El próximo lema muestra que la restricción de S_σ y T_σ a espacios de sucesiones simétricos son endomorfismos de norma 1.

Lema 3.3.4. *Sea X un espacio de sucesiones simétrico y $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función inyectiva. Entonces $T_\sigma, S_\sigma : X \to X$ dadas por* (3.12) *y* (3.13) *respectivamente están bien definidas, $\|T_\sigma\| = 1$ y S_σ es una isometría.*

Demostración. La Observación 3.3.3 junto con la simetría del espacio implican que ambos operadores están bien definidos, que S_σ es una isometría y $\|T_\sigma\| \leqslant 1$. El hecho de que $\|T_\sigma\| = 1$ se sigue de la ecuación $T_\sigma(S_\sigma x_0) = x_0$. □

Ya podemos dar una demostración del Teorema 3.3.2.

Demostración del Teorema 3.3.2. Para empezar tomemos $z \in mon\mathcal{F}$ y veamos que $z^* \in mon\mathcal{F}$. Como $mon\mathcal{F} \subset c_0$ existe una función inyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $z_k^* = |z_{\sigma(k)}|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Observemos que $|T_\sigma(z)| = z^*$. Tomemos $f \in \mathcal{F}$, luego $f \circ T_\sigma$ también pertenece a $\mathcal{F}$. Queremos ver que, si $\alpha(\sigma) \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ denota al multi-índice que cumple $T_\sigma(z)^\alpha = z^{\alpha(\sigma)}$, entonces

$$c_\alpha(f) = c_{\alpha(\sigma)}(f \circ T_\sigma) \tag{3.14}$$

para todo α. Tomemos $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ y sea $N = \text{máx}\{k \colon \alpha_k \neq 0\}$. Por un lado tenemos

$$(f \circ T_\sigma)(w) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^N} c_\beta(f \circ T_\sigma) w^\beta ,$$

para todo $w \in \mathbb{C}^N \cap \mathcal{R}$. Sea $M = \text{máx}\{\sigma(k) \colon k = 1, \ldots, N\}$ y notemos que $T_\sigma(w) \in \mathbb{C}^M \cap \mathcal{R}$. Por lo tanto

$$(f \circ T_\sigma)(w) = f(T_\sigma(w)) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} c_\gamma(f) T_\sigma(w)^\gamma = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}_0^N} c_\gamma(f) w^{\gamma(\sigma)}.$$

La unicidad de los coeficientes de Taylor da (3.14). Una vez que tenemos esto (recordemos que $f \circ T_\sigma \in \mathcal{F}$ y $z \in mon\mathcal{F}$) se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(f)(z^*)^\alpha| &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(f)||(T_\sigma(z))^\alpha| \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_{\alpha(\sigma)}(f \circ T_\sigma)||z^{\alpha(\sigma)}| \leqslant \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(f \circ T_\sigma) z^\alpha| < \infty,\end{aligned}$$

lo que termina de probar lo que queremos.

Para la otra implicación, supongamos que $z^* \in mon\mathcal{F}$. Nuevamente, como $mon\mathcal{F} \subset c_0$, existe una función inyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $z_k^* = |z_{\sigma(k)}|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Será útil notar que $|z| = S_\sigma(z^*)$. Dada $f \in \mathcal{F}$ tenemos

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(f) z^\alpha| = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(f)||(S_\sigma(z^*))^\alpha|. \tag{3.15}$$

Además,

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f\circ S_\sigma)w^\alpha = f(S_\sigma(w)) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f)S_\sigma(w)^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N} c_\alpha(f)S_\sigma(w)^\alpha.$$

Obbservemos que para $\alpha\in\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$, si existe $k\in\mathbb{N}\backslash\sigma(\mathbb{N})$ tal que $\alpha_k\neq 0$ entonces $S_\sigma(w)^\alpha=0$, de otro modo definimos $\alpha(\sigma^{-1})\in\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ siendo el único multi-índice que cumple $S_\sigma(w)^\alpha = w^{\alpha(\sigma^{-1})}$. Por la unicidad de los coeficientes de la expansión de Taylor de $f\circ S_\sigma:\mathbb{C}^N\to\mathbb{C}$ se sigue que

$$c_\alpha(f)S_\sigma(z^*)^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si existe } k\notin\sigma(\mathbb{N}) \text{ tal que } \alpha_k\neq 0\\ c_{\alpha(\sigma^{-1})}(f\circ S_\sigma)(z^*)^{\alpha(\sigma^{-1})} & \text{de otro modo,}\end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(f)z^\alpha| &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(f)||(S_\sigma(z^*))^\alpha|\\ &= \sum_{\alpha\in(\sigma(\mathbb{N})\cup\{0\})^{(\mathbb{N})}} \left|c_{\alpha(\sigma^{-1})}(f\circ S_\sigma)(z^*)^{\alpha(\sigma^{-1})}\right|\\ &\leqslant \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(f\circ S_\sigma)||(z^*)^\alpha| < \infty,\end{aligned}$$

como queríamos. □

Observación 3.3.5. Sea $\mathcal{R}$ un dominio de Reinhardt simétrico en un espacio de sucesiones X y consideremos una familia de funciones holomorfas $\mathcal{F}\subset H(\mathcal{R})$ de forma que para algún $m\geqslant 2$ el espacio $\mathcal{P}(^mX)$ se encuentre dentro de $\mathcal{F}$. Entonces, como $X\subset\ell_\infty$ continuamente, tenemos $\mathcal{P}(^m\ell_\infty)\subset\mathcal{P}(^mX)\subset\mathcal{F}$. Con esto, el Teorema 3.2.2 implica

$$mon\mathcal{F}\subset mon\mathcal{P}(^m\ell_\infty) = \ell_{\frac{2m}{m-1},\infty}\subset c_0.$$

Corolario 3.3.6. *Para todo espacio de sucesiones simétrico X las familias de funciones holomorfas $H_b(X), \mathcal{A}_u(B_X), H_\infty(B_X)$ y $\mathcal{P}(^mX)$ con $m\geqslant 2$ son familias de reordenamiento.*

Demostración. Cada una de estas familias satisface la condición de la Observación 3.3.5. Luego la Observación 3.3.1 y el Teorema 3.3.2 dan la conclusión. □

3.4. El conjunto de convergencia monomial de $\mathcal{P}(^m\ell_r)$

Ahora dirigimos nuestra atención al conjunto de convergencia monomial de los polinomios homogéneos. Como ya mencionamos para $2\leqslant r\leqslant\infty$ y $m\geqslant 2$ tenemos

$$mon\mathcal{P}(^m\ell_{r,\infty}) = \ell_{q,\infty},$$

con $q = q(r) = \left(\frac{m-1}{2m} + \frac{1}{r}\right)^{-1}$. Como la inclusión natural $\ell_r \hookrightarrow \ell_{r,\infty}$ es continua se sigue que $\mathcal{P}(^m\ell_{r,\infty}) \subset \mathcal{P}(^m\ell_r)$ y luego

$$mon\mathcal{P}(^m\ell_r) \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_{r,\infty}) = \ell_{q,\infty}.$$

Además usando el Teorema 3.2.2 y el Lema 3.1.6 con $\mathcal{R} = \ell_r$ y $\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \mathcal{P}(^m\ell_r)$ concluimos que

$$\ell_r \cdot \ell_{\frac{2m}{m-1},\infty} = \ell_r \cdot mon\mathcal{P}(^m\ell_\infty) \subset \ell_r \cdot [\mathcal{P}(^m\ell_r)]_\infty \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_r). \tag{3.16}$$

Para $1 < r \leqslant 2$ and $m \geqslant 2$, definimos $q = (mr')' = \frac{mr}{r(m-1)+1}$. En [DMP09, Example 4.6] los autores prueban que

$$\ell_{q-\varepsilon} \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_r) \subset \ell_{q,\infty}, \tag{3.17}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Nuestro objetivo es ajustar esta cota inferior. En [DMP09] los autores conjeturan que

$$\ell_q \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_r), \tag{3.18}$$

donde $q = (mr')'$ como antes. En el siguiente teorema presentamos el primer resultado mejorando la cota inferior en (3.17) que además prueba la conjetura. Luego en el Capítulo 8 damos un resultado aún mejor para las cotas inferior con espacio que se acercan a $\ell_{q,\infty}$ cuando el grado de homogeneidad tiende a infinito.

Teorema 3.4.1. *Para cada $1 < r \leqslant 2$, existe $d_r > 1$ tal que para todo m y n, todo $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y todo $z \in \mathbb{C}^n$*

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}| \leqslant m^{d_r} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \|z\|_{\ell_q^n}^m, \tag{3.19}$$

donde $q := (mr')'$.

Primero usaremos el Teorema 3.4.1 para probar que la conjetura previamente mencionada es verdad. Luego usando un lema técnico seremos capaces de probar el teorema.

Corolario 3.4.2. *Dados $1 < r \leqslant 2$, $m \geqslant 2$ y $q = (mr')'$ vale que*

$$\ell_q \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_r).$$

Demostración. Fijemos $z \in \ell_q$ y tomemos $P \in \mathcal{P}(^m\ell_r)$. Dado $n \in \mathbb{N}$ consideremos $P_n = P \circ \iota_n \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y $\pi_n(z) \in \mathbb{C}^n$ donde π_n y ι_n son la proyección e inclusión naturales definidas en (1.3) y (1.4) respectivamente. Notemos que $\|P_n\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \leqslant \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r)}$ y $\|\pi_n(z)\|_{\ell_q^n} \leqslant \|z\|_{\ell_q}$. Además, por la construcción que hicimos de la expansión monomial de una función holomorfa, tenemos para todo $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$ que $c_{\mathbf{j}}(P_n) = c_{\mathbf{j}}(P)$.

Gracias al Teorema 3.4.1 tenemos

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P)(\pi_n z)_{\mathbf{j}}| \leqslant m^{d_r} \|P_n\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \|\pi_n z\|_{\ell_q^n}^m \leqslant m^{d_r} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r)} \|z\|_{\ell_q}^m < \infty,$$

tomando límite cuando $n \to \infty$ se sigue

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m)} |c_{\mathbf{j}}(P)z_{\mathbf{j}}| \leqslant m^{d_r}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r)}\|z\|_{\ell_q}^m < \infty.$$

Como esto vale para todo $P \in \mathcal{P}(^m\ell_r)$ entonces $z \in mon\mathcal{P}(^m\ell_r)$. $\square$

Para probar el Teorema 3.4.1 necesitamos el siguiente lema técnico.

Lema 3.4.3. *Sea $r > 1$. Existe $C_r > 0$ tal que, para todo m,*

$$\sup\left\{\frac{m^{m/r}}{m!}\frac{n_1!}{n_1^{n_1/r}}\cdots\frac{n_k!}{n_k^{n_k/r}} : k \in \mathbb{N}, n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, n_1+\cdots+n_k = m\right\} \leqslant C_r m^{\frac{e^{\frac{1}{r-1}}-1}{2}}.$$

Demostración. Procedemos por inducción en m. El enunciado se satisface trivialmente para $m = 2$ y asumimos que vale para $m-1$. Fijemos k y elijamos $n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N}$, todos no nulos, tales que $n_1+\cdots+n_k = m$. Podemos asumir que $n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_k \geqslant 1$. Consideramos dos casos posibles. Primero, si $k < e^{\frac{1}{r-1}}$ la *desigualdad de Stirling* en (2.16) y el hecho de que $n_j \leqslant m$ para todo j implican que

$$\begin{aligned}\frac{m^{m/r}}{m!}\frac{n_1!}{n_1^{n_1/r}}\cdots\frac{n_k!}{n_k^{n_k/r}} &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\frac{e^m}{m^{m/r'}}\prod_{j=1}^k\frac{\sqrt{2\pi n_j}n_j^{n_j/r'}e^{1/(12n_j)}}{e^{n_j}} \\ &\leqslant (2\pi)^{\frac{k-1}{2}}e^{\sum_{j=1}^k\frac{1}{12n_j}}\left(\frac{n_1^{n_1}\cdots n_k^{n_k}}{m^m}\right)^{\frac{1}{r'}}\left(\frac{n_1\cdots n_k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (2\pi)^{\frac{k-1}{2}}e^{\sum_{j=1}^k\frac{1}{12j}}m^{\frac{k-1}{2}} \\ &\leqslant (2\pi)^{\frac{e^{\frac{1}{r-1}}-1}{2}}e^{\frac{r}{12(r-1)}}m^{\frac{e^{\frac{1}{r-1}}-1}{2}}.\end{aligned}$$

Por otro lado, si $k \geqslant e^{\frac{1}{r-1}}$ tenemos

$$\frac{m^{m/r}}{m!}\frac{n_1!}{n_1^{n_1/r}}\cdots\frac{n_k!}{n_k^{n_k/r}} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{r}}\frac{1}{m^{1/r'}}\frac{(m-1)^{(m-1)/r}}{(m-1)!}\frac{n_1!}{n_1^{n_1/r}}\cdots\frac{n_{k-1}!}{n_{k-1}^{n_{k-1}/r}}\frac{n_k!}{n_k^{n_k/r}}. \quad (3.20)$$

Si $n_k = 1$ entonces $n_1+\cdots+n_{k-1} = m-1$ y podemos usar la hipótesis inductiva y el hecho de que $k \leqslant m$ para concluir

$$\begin{aligned}\frac{m^{m/r}}{m!}\frac{n_1!}{n_1^{n_1/r}}\cdots\frac{n_k!}{n_k^{n_k/r}} &\leqslant \left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{r}}\frac{1}{k^{1/r'}}C_r(m-1)^{\frac{e^{\frac{1}{r-1}}-1}{2}} \\ &\leqslant C_r e^{1/r}\frac{1}{e^{\frac{1}{(r-1)r'}}}(m-1)^{\frac{e^{\frac{1}{r-1}}-1}{2}} \leqslant C_r m^{\frac{e^{\frac{1}{r-1}}-1}{2}}.\end{aligned}$$

Finalmente, si $n_k > 1$ entonces

$$\frac{(n_k-1)^{\frac{n_k-1}{r'}}n_k}{n_k^{n_k/r}} = \left(\frac{n_k-1}{n_k}\right)^{\frac{n_k-1}{r'}}n_k^{\frac{1}{r'}} \leqslant n_k^{\frac{1}{r'}}.$$

Nuevamente usando la hipótesis inductiva y el hecho de que $n_k \leqslant m/k$ obtenemos de (3.20) que

$$\begin{aligned}\frac{m^{m/r}}{m!}\frac{n_1!}{n_1^{n_1/r}}\cdots\frac{n_k!}{n_k^{n_k/r}} &\leqslant \Big(\frac{m}{m-1}\Big)^{\frac{m-1}{r}}\Big(\frac{n_k}{m}\Big)^{1/r'} C_r(m-1)^{\frac{e^{\frac{1}{r-1}}-1}{2}}\\ &\leqslant \Big(\frac{m}{m-1}\Big)^{\frac{m-1}{r}}\frac{1}{k^{1/r'}} C_r(m-1)^{\frac{e^{\frac{1}{r-1}}-1}{2}}.\end{aligned}$$

De aquí concluimos como en el caso anterior. $\square$

Prueba del Teorema 3.4.1. Claramente es suficiente mostrar (3.19) y, por el Corolario 3.3.6 podemos asumir sin perder generalidad que $z = z^*$. Primero que todo, por la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_m\leqslant n}|c_{\mathbf{j}}(P)z_{j_1}\dots z_{j_{m-1}}z_{j_m}| &= \sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_{m-1}\leqslant n}|z_{j_1}\dots z_{j_{m-1}}|\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n}|c_{\mathbf{j}}(P)z_{j_m}|\\ &\leqslant \sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_{m-1}\leqslant n}|z_{j_1}\dots z_{j_{m-1}}|\Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n}|c_{\mathbf{j}}(P)|^{r'}\Big)^{\frac{1}{r'}}\Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n}|z_{j_m}^r|\Big)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Usando la *desigualdad BDS* en el Teorema 2.1.7 junto con el hecho de que para todo $(\mathbf{i},k)\in\mathcal{J}(m-1,n)$ tenemos $\big(\frac{(m-1)^{m-1}}{\alpha(\mathbf{i},k)^{\alpha(\mathbf{i},k)}}\big)\leqslant e(m-1)\big(\frac{(m-2)^{m-2}}{\alpha(\mathbf{i})^{\alpha(\mathbf{i})}}\big)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}&\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}|c_{\mathbf{j}}(P)z_{\mathbf{j}}|\\ &\leqslant e^{1+\frac{1}{r}}(m-1)^{\frac{1}{r}}m\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}\sum_{j_{m-1}=1}^{n}|z_{j_{m-1}}|\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}(m-2,j_{m-1})}|z_{\mathbf{i}}|\Big(\frac{(m-2)^{m-2}}{\alpha(\mathbf{i})^{\alpha(\mathbf{i})}}\Big)^{\frac{1}{r}}\Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n}|z_{j_m}|^r\Big)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Para cada $1\leqslant k\leqslant n$ fijo, usando que $|[\mathbf{j}]| = \frac{m!}{\alpha!}$ si $\mathbf{j}=F(\alpha)$, el Lema 3.4.3 (escribimos $a_r = \frac{e^{\frac{1}{r-1}}-1}{2}$) y que $q\leqslant r$, tenemos

$$\begin{aligned}&|z_k|\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}(m-2,k)}|z_{\mathbf{i}}|\Big(\frac{(m-2)^{m-2}}{\alpha(\mathbf{i})^{\alpha(\mathbf{i})}}\Big)^{\frac{1}{r}}\Big(\sum_{j=k}^{n}|z_j|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\\ &\qquad\leqslant |z_k|\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}(m-2,k)}|z_{\mathbf{i}}||\mathbf{i}|\frac{(m-2)^{(m-2)/r}}{\alpha(\mathbf{i})^{\alpha(\mathbf{i})/r}|\mathbf{i}|}\Big(|z_k|^{r-q}\sum_{j=k}^{n}|z_j|^q\Big)^{\frac{1}{r}}\\ &\qquad= C_r(m-2)^{a_r}|z_k|^{2-\frac{q}{r}}\sum_{i_1,\dots,i_{m-2}=1}^{k}|z_{i_1}\cdots z_{i_{m-2}}|\Big(\sum_{j=k}^{n}|z_j|^q\Big)^{\frac{1}{r}}\\ &\qquad= C_r(m-2)^{a_r}\|z\|_{\ell_q}^{\frac{q}{r}}|z_k|^{2-\frac{q}{r}}\Big(\sum_{i=1}^{k}|z_i|\Big)^{m-2}\\ &\qquad\leqslant C_r(m-2)^{a_r}\|z\|_{\ell_q^n}^{\frac{q}{r}+m-2}|z_k|^{2-\frac{q}{r}}k^{\frac{m-2}{q'}}.\end{aligned}$$

Por otro lado, como $2 - \frac{q}{r} \geqslant q$ para $m \geqslant 2$, se sigue que

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k|^{2-\frac{q}{r}} k^{\frac{m-2}{q'}} = \|z\|_{\ell^n_{q,2-q/r}}^{2-\frac{q}{r}} \leqslant \|z\|_{\ell^n_q}^{2-\frac{q}{r}}$$

Todo esto junto da

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}| \leqslant K_r m (m-1)^{\frac{1}{r}} (m-2)^{a_r} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell^n_r)} \|z\|^m_{\ell^n_q} . \qquad \square$$

Capítulo 4

Incondicionalidad en espacios de polinomios

En este capítulo presentamos la incondicionalidad en el contexto de espacios de polinomios. La constante de incondicionalidad para espacios de polinomios y su dependencia en el número de variables y el grado de homogeneidad será crucial para estudiar el radio de Bohr y los conjuntos de convergencia monomial en los siguientes capítulos.

Recordemos que una base de Schauder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach X es incondicional si dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ y $x = \sum_{n\geqslant 1} a_n x_n \in X$ vale que $\sum_{n\geqslant 1} a_{\sigma(n)} x_n \in X$ para todo $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$. Esta es una descripción cualitativa de la noción de incondicionalidad para una base, pero sólo tiene sentido estudiarla en espacios de dimensión infinita, ya que se satisface trivialmente para toda base en el contexto de dimensión finita. Por otro lado esta noción es equivalente a la existencia de cierta constante $K > 0$ tal que, para todo par de sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ y $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$, tal que

$$\left\| \sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n a_n x_n \right\|_X \leqslant K \left\| \sum_{n\geqslant 1} a_n x_n \right\|_X . \tag{4.1}$$

Esta última manera de describir la incondicionalidad de una base da un enfoque más cuantitativo. Este abordaje tiene sentido en el caso de espacios de Banach de dimensión finita, y será muy fructífero para $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$.

4.1. Incondicionalidad mixta y la base monomial

Ahora definiremos un concepto ligeramente más general para espacios de polinomios m-homogéneos en n variables complejas. En el espacio vectorial $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ hay muchas posibles normas naturales. En particular las normas uniformes para ℓ_p^n y ℓ_q^n son diferentes cuando $p \neq q$. Definiremos el concepto de incondicionalidad mixta inspirado en (4.1), pero permitiendo que las normas tomadas en el lado derecho e izquierdo de la desigualdad sean diferentes. Más precisamente lo definimos del siguiente modo.

Definición 4.1.1. *Sea* $(P_i)_{i\in\Lambda}$ *una base de Schauder de* $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$*. Para* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ *y* $n, m \in \mathbb{N}$ *definimos* $\chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda}) = \chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda}; \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n))$ *como la mejor constante* $C > 0$ *tal que*

$$\left\| \sum_{i\in\Lambda} \theta_i c_i P_i \right\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)} \leqslant C \left\| \sum_{i\in\Lambda} c_i P_i \right\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}, \tag{4.2}$$

para todo $P = \sum_{i\in\Lambda} c_i P_i \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ *y toda elección de números complejos* $(\theta_i)_{i\in\Lambda}$ *de módulo uno.*

La constante de incondicionalidad (p, q)-mixta *de* $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ *se define como*

$$\chi_{p,q}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)) := \text{ínf}\{\chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda}) : (P_i)_{i\in\Lambda} \text{ base de } \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)\}.$$

Esta idea fue introducida por Defant, Maestre y Prengel en [DMP09, Section 5]. Notemos que para $p = q$ el concepto de incondicionalidad mixta coincide con la noción de incondicionalidad clásica sobre $\mathcal{P}(^m\ell_p^n)$. Será interesante y natural estudiar la constante de incondicionalidad mixta de los espacios $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ al igual que la particular constante para la base monomial $(z_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}$ (que también puede escribirse como $(z^\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}$). En los siguientes capítulos quedará clara la profunda conexión entre $\chi_{p,q}((z_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}; \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n))$, el radio de Bohr mixto y ciertos conjuntos de convergencia monomial.

El siguiente resultado muestra que, para estudiar el comportamiento asintótico de las constante de incondicionalidad mixta de $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$, es suficiente entender lo que sucede con la base monomial $(z_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}$. Esto puede verse como una suerte de extensión de un resultado de Pisier y Schütt [Pis78, Sch78] (véase también [DDGM01, DF11, CG11]).

Teorema 4.1.2. *Dados* $m, n \in \mathbb{N}$ *y* $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ *vale la siguiente relación*

$$\chi_{p,q}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)) \leqslant \chi_{p,q}\big((z_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\big) \leqslant 2^m \chi_{p,q}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)).$$

Nuestra prueba se basa en el enfoque de Szarek [Sza81] combinado con la siguiente desigualdad debida a Bayart [Bay02] (ver también [Wei80, DM15]).

Lema 4.1.3 (Desigualdad de Bayart)**.** *Sea* $P(z) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}}$ *un polinomio* m*-homogéneo en* n*-variables. Entonces vale*

$$\Big(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}|^2 \Big)^{1/2} \leqslant 2^{m/2} \int_{\mathbb{T}^n} |P(w)| dw, \tag{4.3}$$

donde $\mathbb{T}^n$ *denota el toro* n*-dimensional y* dw *es la medida de Lebesgue normalizada en* $\mathbb{T}^n$*.*

Antes de dar la demostración introducimos un operador. Para todo $w = (w_1 \dots, w_n) \in \mathbb{T}^n$ y cualquier $1 \leqslant p \leqslant \infty$ definimos

$$\begin{aligned} T_w^p : \mathcal{P}(^m\ell_p^n) &\longrightarrow \mathcal{P}(^m\ell_p^n) \\ \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} a_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}} &\longmapsto \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} a_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}} w_{\mathbf{j}}, \end{aligned}$$

el cual es claro que tiene norma uno.

También necesitaremos la siguiente caracterización alternativa de la constante de incondicionalidad mixta para una base dada.

Lema 4.1.4. *Sea $(P_i)_{i\in\Lambda}$ una base de $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y $(P_i')_{i\in\Lambda}$ su base dual (i.e., $\langle P_i', P_k\rangle = \delta_{i.k}$). Para $1 \leqslant q, p \leqslant \infty$ y $n, m \in \mathbb{N}$, $\chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda})$ es exactamente la mejor constante $C > 0$ que cumple*

$$\sum_{i\in\Lambda} |\langle P_i', Q\rangle\langle Q', P_i\rangle| \leqslant C\|Q\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}\|Q'\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)'}, \tag{4.4}$$

para todo $Q \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y $Q' \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)'$.

Antes de probar el Lema 4.1.4 notemos que, dados $Q = \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y $(P_i)_{i\in\Lambda}$ una base de $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ con base dual $(P_i')_{i\in\Lambda}$, se tiene

$$Q = \sum_{i\in\Lambda}\langle P_i', Q\rangle P_i.$$

Demostración. Llamemos C_1 a la mejor constante que cumple la ecuación (4.4). Queremos probar que $C_1 = \chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda})$. Comenzaremos probando que $C_1 \leqslant \chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda})$.

Fijemos $Q \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$, $Q' \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)'$ y, para $i \in \Lambda$, sea θ_i el signo de $\langle Q', P_i\rangle\langle P_i', Q\rangle$, entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\Lambda} |\langle P_i', Q\rangle\langle Q', P_i\rangle| &= \sum_{i\in\Lambda}\theta_i\langle P_i', Q\rangle\langle Q', P_i\rangle \\
&\leqslant \left\|\sum_{i\in\Lambda}\theta_i\langle P_i', Q\rangle P_i\right\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)} \|Q'\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)'} \\
&\leqslant \chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda})\left\|\sum_{i\in\Lambda}\langle P_i', Q\rangle P_i\right\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \|Q'\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)'} \\
&= \chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda})\|Q\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}\|Q'\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)'}.
\end{aligned}$$

Luego $\chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda})$ cumple la desigualdad en (4.4) para todo par $Q \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y $Q' \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)'$. Por la minimalidad de C_1 vale que $C_1 \leqslant \chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda})$.

Por otro lado, sean $(\theta_i)_{i\in\Lambda} \subset \mathbb{T}$ y $(c_i)_{i\in\Lambda} \subset \mathbb{C}$. Tomemos $Q = \sum_{i\in\Lambda} c_iP_i \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y $Q' \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)'$ tale que $\|\sum_{i\in\Lambda}\theta_ic_iP_i\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)} = Q'(\sum_{i\in\Lambda}\theta_ic_iP_i)$ y $\|Q'\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)'} = 1$, luego se sigue que

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{i\in\Lambda}\theta_i c_i P_i\Big\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_q^n)} &= Q'\Big(\sum_{i\in\Lambda}\theta_i c_i P_i\Big)\\
&= \sum_{i\in\Lambda}\theta_i c_i\langle Q',P_i\rangle\\
&\leqslant \sum_{i\in\Lambda}|\theta_i c_i\langle Q',P_i\rangle|\\
&\leqslant \sum_{i\in\Lambda}|\langle P_i',Q\rangle\langle Q',P_i\rangle|\\
&\leqslant C_1\|Q\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_p^n)}\|Q'\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_q^n)'}\\
&= C_1\Big\|\sum_{i\in\Lambda}c_iP_i\Big\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_p^n)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto C_1 satisface la desigualdad en (4.2) y por la minimaliad de $\chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda})$ tenemos que

$$\chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda}) \leqslant C_1. \qquad \square$$

Ya podemos probar el Teorema 4.1.2.

Demostración del Teorema 4.1.2. Sea $(P_i)_{i\in\Lambda}$ una base de $\mathcal{P}({}^m\mathbb{C}^n)$ y $(P_i')_{i\in\Lambda}$ su base dual. Consideremos $Q\in\mathcal{P}({}^m\mathbb{C}^n)$ y $Q'\in\mathcal{P}({}^m\mathbb{C}^n)'$. Usando que vale la igualdad $1=|\langle z_{\mathbf{j}}',z_{\mathbf{j}}\rangle| = |\sum_{i\in\Lambda}\langle z_{\mathbf{j}}',P_i\rangle\langle P_i',z_{\mathbf{j}}\rangle|$, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}|\langle Q',z_{\mathbf{j}}\rangle\langle z_{\mathbf{j}}',Q\rangle| &= \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}|\langle Q',z_{\mathbf{j}}\rangle\langle z_{\mathbf{j}}',Q\rangle||\sum_{i\in\Lambda}\langle z_{\mathbf{j}}',P_i\rangle\langle P_i',z_{\mathbf{j}}\rangle|\\
&\leqslant \sum_{i\in\Lambda}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}|\langle Q',z_{\mathbf{j}}\rangle\langle z_{\mathbf{j}}',Q\rangle\langle z_{\mathbf{j}}',P_i\rangle\langle P_i',z_{\mathbf{j}}\rangle|\\
&\leqslant \sum_{i\in\Lambda}\Big(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}|\langle Q',z_{\mathbf{j}}\rangle\langle z_{\mathbf{j}}',P_i\rangle|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}|\langle z_{\mathbf{j}}',Q\rangle\langle P_i',z_{\mathbf{j}}\rangle|^2\Big)^{\frac12}\\
&\leqslant \sum_{i\in\Lambda}2^{m/2}\int_{\mathbb{T}^n}|\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\langle Q',z_{\mathbf{j}}\rangle\langle z_{\mathbf{j}}',P_i\rangle w_{\mathbf{j}}|dw\;\cdot\;2^{m/2}\int_{\mathbb{T}^n}|\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\langle z_{\mathbf{j}}',Q\rangle\langle P_i',z_{\mathbf{j}}\rangle\tilde{w}_{\mathbf{j}}|d\tilde{w}\\
&= \sum_{i\in\Lambda}2^m\int_{\mathbb{T}^n}|\langle (T_w^q)^*(Q'),P_i\rangle|dw\;\cdot\;\int_{\mathbb{T}^n}|\langle P_i',T_{\tilde{w}}^p(Q)\rangle|d\tilde{w}\\
&= 2^m\int_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n}\sum_{i\in\Lambda}|\langle (T_w^q)^*(Q'),P_i\rangle\langle P_i',T_{\tilde{w}}^p(Q)\rangle|dwd\tilde{w}\\
&\leqslant 2^m\int_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n}\chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda})\|(T_w^q)^*(Q')\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_q^n)'}\|T_{\tilde{w}}^p(Q)\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_p^n)}dwd\tilde{w}\\
&\leqslant 2^m\chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda})\|Q'\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_q^n)'}\|Q\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_p^n)},
\end{aligned}$$

donde aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz para la segunda desigualdad, la desigualdad de Bayart en (4.3) para la tercera y el Lema 4.1.4 para la base (P_i) para la penúltima. Usando el Lema 4.1.4 nuevamente pero para la base monomial $(z_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}$ se sigue que

$$\chi_{p,q}\big((z_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\big) \leqslant 2^m \chi_{p,q}((P_i)_{i\in\Lambda}).$$

Gracias a que $(P_i)_{i\in\Lambda}$ es una base arbitraria de $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ vale que

$$\chi_{p,q}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)) \leqslant \chi_{p,q}\big((z_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\big) \leqslant 2^m \chi_{p,q}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)),$$

lo que concluye la prueba. □

4.2. Conexión con convergencia monomial

Existe un vínculo muy profundo entre las nociones de incondicionalidad mixta en espacios de polinomios y convergencia monomial. Esta conexión se encuentra desarrollada en [DMP09]. Para tener una versión completa (necesaria más adelante) necesitamos generalizar el concepto de incondicionalidad mixta para la base monomial.

Definición 4.2.1. *Fijemos $n, m \in \mathbb{N}$ y sean $X_n = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_{X_n})$ e $Y_n = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_{Y_n})$ dos espacios de Banach de dimensión n sobre $\mathbb{C}$. Definimos $\chi_M(\mathcal{P}(^mX_n), \mathcal{P}(^mY_n))$ como la mejor constante $C > 0$ tal que*

$$\Big\|\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \theta_\alpha a_\alpha z^\alpha\Big\|_{\mathcal{P}(^mY_n)} \leqslant C \Big\|\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} a_\alpha z^\alpha\Big\|_{\mathcal{P}(^mX_n)}, \tag{4.5}$$

para todo $(a_\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \subset \mathbb{C}$ yy toda elección de números complejos $(\theta_\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}$ de módulo uno.

Observemos que para $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, si $X_n = \ell_p^n$ e $Y_n = \ell_q^n$, se sigue que

$$\chi_M(\mathcal{P}(^mX_n), \mathcal{P}(^mY_n)) = \chi_{p,q}\big((z^\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}\big).$$

Presentaremos a continuación dos herramientas muy importantes que muestran la relación íntima entre el conjunto de convergencia monomial y la incondicionalidad mixta para la base monomial. Ambos resultados aparecen en [DMP09] y tienen más equivalencias en sus enunciados.

Teorema 4.2.2 (Teorema 5.1 de [DMP09])**.** *Sean X e Y espacios de sucesiones, $\mathcal{R} \subset X$ un conjunto de Reinhardt acotado y $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ una subfamilia cerrada de $H_\infty(\mathcal{R})$ que contiene a todos los polinomios. Los siguientes son equivalentes:*

(1) $rB_Y \subset mon\mathcal{F}(\mathcal{R})$ para algún $r > 0$.

(2) Existe una constante $C > 0$ que depende sólo de X, Y tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \chi_M(\mathcal{P}(^mX_n), \mathcal{P}(^mY_n)) \leqslant C^m.$$

Recordemos que dado un espacios de sucesiones X denotamos por $X_n = \pi_n(X) \subset \mathbb{C}^n$ a su proyección n-dimensional dotada de la norma inducida.

Teorema 4.2.3. *Sean X e Y espacios de sucesiones y $m \geqslant 2$. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $Y \subset mon\mathcal{P}(^m X)$.

(2) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \chi_M(\mathcal{P}(^m X_n), \mathcal{P}(^m Y_n)) < \infty$.

Dados X e Y espacios de sucesiones decimos que el comportamiento asintótico de la constante de incondicionalidad mixta $\chi_M(\mathcal{P}(^m X_n), \mathcal{P}(^m Y_n))$ es *hipercontractiva* en el grado de homogeneidad m siempre que exista una constante $C(X, Y, n) > 0$ independiente de m tal que

$$\chi_M(\mathcal{P}(^m X_n), \mathcal{P}(^m Y_n)) \leqslant C(X, Y, n)^m, \tag{4.6}$$

para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Notemos que una de las equivalencias en el Teorema 4.2.2 es que el comportamiento asintótico de la constante $\chi_M(\mathcal{P}(^m X_n), \mathcal{P}(^m Y_n))$ es trivial en n e hipercontractivo en m. Por otro lado, el Teorema 4.2.3 da el comportamiento asintótico trivial de la constante en el número de variables pero no hipercontractividad en el grado de homogeneidad como una de las equivalencias.

Observación 4.2.4. Dado $1 < p \leqslant 2$ gracias al Corolario 3.4.2 y el Teorema 4.2.3 existe una constante $C(p, m) > 0$ tal que para todo par $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\chi_{p,q}((z^\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}) \leqslant C(p, m) < \infty,$$

donde $q = q(p) = (mp')'$.

Tenemos entonces que, fijado m, el comportamiento asintótico de $\chi_M(\mathcal{P}(^m \ell_p^n), \mathcal{P}(^m \ell_q^n))$ cuando el número de variables tiende a infinito es trivial. Sin embargo, usando el Teorema 3.4.1 podemos decir más.

Lema 4.2.5. *Dados $n, m \in \mathbb{N}$ y $1 < p \leqslant 2$ existe una constante $C_p > 0$ tal que*

$$\chi_{p,q}((z^\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}) \leqslant C_p^m,$$

donde $q = q(p) = (mp')'$.

Demostración. Tomemos $P \in \mathcal{P}(^m \mathbb{C}^n)$ y $(\theta_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}$. Fijemos $z \in B_{\ell_q^n}$, gracias al Teorema 3.4.1 vale que

$$\left| \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \theta_{\mathbf{j}} c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}} \right| \leqslant \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}| \leqslant m^{d_r} \|P\|_{\mathcal{P}(^m \ell_r^n)}.$$

Tomando supremo sobre $z \in B_{\ell_q^n}$ se sigue que

$$\Big\| \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} \theta_{\mathbf{j}} c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}} \Big\|_{\mathcal{P}(^m \ell_q^n)} \leqslant m^{d_r} \|P\|_{\mathcal{P}(^m \ell_r^n)},$$

debido a su minimalidad $\chi_{p,q}((z^\alpha)_{\alpha \in \Lambda(m,n)}) \leqslant m^{d_p}$. Observemos que $\left(m^{d_p}\right)^{1/m} \to 0$ cuando $m \to \infty$, luego existe una constante $C_p > 0$ tal que $m^{d_p} \leqslant C_p^m$, y esto prueba el lema. $\square$

Notemos que el Lema 4.2.5 da hipercontractividad en el grado de homogeneidad para $\chi_{(mp')',p}((z^\alpha)_{\alpha \in \Lambda(m,n)})$. Además observemos que el espacio $\ell^n_{(mp')'}$ depende de m, luego no es posible aplicar el Teorema 4.2.2 para concluir, por ejemplo, algo al respecto de $monH_\infty(B_{\ell_p})$. En el Capítulo 6 concentraremos nuestros esfuerzos en encontrar el mayor espacio de sucesiones, independiente de m, para el cual valgan desigualdades hipercontrativas como en el Teorema 3.4.1 para todo $m \in \mathbb{N}$. Esto nos dará el Teorema 6.2.3, la clave para conseguir una mejor descripción de $monH_\infty(B_{\ell_r})$ y además una caracterización de $monH_b(\ell_r)$ para $1 < r \leqslant 2$.

4.3. La constante de incondicionalidad (p,q)-mixta

Ahora presentaremos una caracterización del comportamiento asintótico de la constante de incondicionalidad (p,q)-mixta para $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$. En el caso en que $q = p$ se recuperan los resultados de [DDGM01].

Teorema 4.3.1. *Para cada $m \in \mathbb{N}$ tenemos que*

$$\begin{cases} \chi_{p,q}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)) \sim 1 & \text{para } (I) \quad : [\frac{1}{p} + \frac{m-1}{2m} \leqslant \frac{1}{q} \wedge \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2}] \text{ o} \\ & \qquad\qquad [\frac{m-1}{m} + \frac{1}{mr} < \frac{1}{q} \wedge \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{r}], \\ \chi_{p,q}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)) \sim n^{m(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}} & \text{para } (II) \quad : [\frac{1}{p} + \frac{m-1}{2m} \geqslant \frac{1}{q} \wedge \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2}], \\ \chi_{p,q}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)) \sim n^{(m-1)(1-\frac{1}{q}) + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}} & \text{para } (III) : [1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{mp} \geqslant \frac{1}{q} \ \wedge \ \frac{1}{2} < \frac{1}{p} < 1]. \end{cases}$$

Para probar el teorema necesitamos un lema que relaciona la constante de incondicionalidad (p,q)-mixta con las constantes $A^m_{p,r}(n)$ y $B^m_{r,q}(n)$ del Capítulo 2.

Lema 4.3.2. *Dadas $1 \leqslant q, p \leqslant \infty$, vale que*

$$\chi_{p,q}((z^\alpha)_{\alpha \in \Lambda(m,n)}) \leqslant B^m_{r,q}(n) A^m_{p,r}(n) \quad \text{para todo} \quad 1 \leqslant r \leqslant \infty. \tag{4.7}$$

Demostración. Fijados un polinomio m-homogéneo en n variables $P(z) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}}$ y una sucesión de números complejos de módulo uno $(\theta_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)}$, tenemos

$$\Big\| \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} \theta_{\mathbf{j}} c_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}} \Big\|_{\mathcal{P}(^m \ell_q^n)} \leqslant B^m_{r,q}(n) \Big(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \leqslant B^m_{r,q}(n) A^m_{q,r}(n) \Big\| \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}} \Big\|_{\mathcal{P}(^m \ell_p^n)},$$

para cada $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Por la minimalidad de $\chi_{p,q}((z^\alpha)_{\alpha \in \Lambda(m,n)})$ se sigue lo que buscábamos probar. $\square$

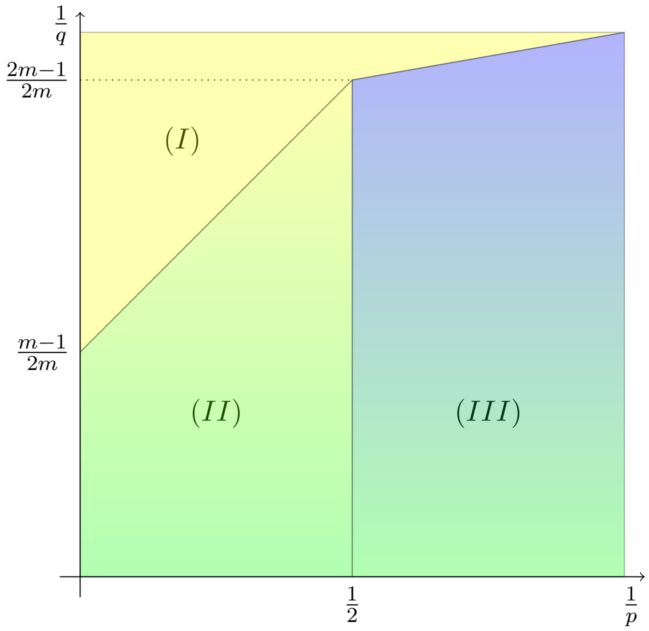

Figura 4.1: Resumen gráfico de la constante incondicional mixta descrita en el Teorema 4.3.1.

Antes de finalmente probar el Teorema 4.3.1 será útil tener en cuenta que para $2 \leqslant p \leqslant \infty$ vale

$$\ell_{\left(\frac{m-1}{2m}+\frac{1}{p}\right)^{-1}} \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_p). \tag{4.8}$$

Esto es sigue usando (3.16) y que $\ell_{\left(\frac{m-1}{2m}+\frac{1}{p}\right)^{-1}} \subset \ell_p \cdot \ell_{\left(\frac{m-1}{2m}\right)^{-1},\infty}$.

También necesitaremos el siguiente resultado de monotonía para la constante incondicional mixta.

Observación 4.3.3. Dados $1 \leqslant r \leqslant q \leqslant \infty$ y $1 \leqslant p \leqslant s \leqslant \infty$

$$\chi_{s,r}\big((z^\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}\big) \leqslant \chi_{p,q}\big((z^\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}\big). \tag{4.9}$$

Esto es verdad ya que, para $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y todo $(\theta_\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}$, usando (2.19) tenemos que

$$\begin{aligned}\|\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \theta_\alpha a_\alpha(P) z^\alpha\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r)} &\leqslant \|\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \theta_\alpha a_\alpha(P) z^\alpha\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q)} \\ &\leqslant \chi_{p,q}\left((z^\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}\right) \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \leqslant \chi_{p,q}\left((z^\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}\right) \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_s^n)}.\end{aligned}$$

Por la minimalidad de la constante de incondicionalidad mixta vale el resultado.

Demostración del Teorema 4.3.1. Probaremos el resultado para $\chi_{p,q}\left((z^\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}\right)$, luego por el Teorema 4.1.2 se tiene el mismo comoportamiento para $\chi_{p,q}(\mathcal{P}({}^m\mathbb{C}^n))$. La prueba esta dividida en casos.

$\bullet(I)$: Sea $p \geqslant 2$. Por la desigualdad en (4.8) sabemos que $\ell_{q_m} \subset mon(\mathcal{P}({}^m\ell_p))$ donde

$$\frac{1}{q_m} = \frac{m-1}{2m} + \frac{1}{p},$$

gracias al Teorema 4.2.3 tenemos que

$$\chi_{p,q_m}\left((z^\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}\right) \sim 1.$$

Por otro lado, si $p \leqslant 2$, por el Lema 4.2.5 se sigue que

$$\chi_{p,q_m}\left((z^\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}\right) \sim 1,$$

con $\frac{1}{q_m} = \frac{m-1}{m} + \frac{1}{mp}$.

Por lo tanto, usando la monotonía dada por la Observación 4.3.3 vale $\chi_{p,q}\left((z^\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}\right) \sim 1$ en la región

$$(I) : \left[\frac{1}{p} + \frac{m-1}{2m} \leqslant \frac{1}{q} \wedge \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2}\right] \text{ or } \left[\frac{m-1}{m} + \frac{1}{mp} < \frac{1}{q} \wedge \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{p}\right].$$

$\bullet(II)$: Sabemos por (I) que $\chi_{p,q_m}(\mathcal{P}({}^m\mathbb{C}^n)) \sim 1$, para $\frac{1}{q_m} = \frac{1}{p} + \frac{m-1}{2m}$. Ahora estimaremos $\chi_{p,\infty}(\mathcal{P}({}^m\mathbb{C}^n))$ para $0 \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2}$. Tomemos $r = 1$. Por la Proposición 2.2.6 y el Teorema 2.2.5 (C) tenemos

$$B^m_{r,\infty}(n) \sim 1 \ , \ A^m_{p,r}(n) \sim n^{m(\frac{1}{p}+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}.$$

Usando el Lema 4.3.2 se sigue que

$$\chi_{p,\infty}(\mathcal{P}({}^m\mathbb{C}^n)) \ll n^{m(\frac{1}{p}+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}.$$

Tomemos un polinomio $P = \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} a_\alpha z^\alpha$ con $\|P\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_p^n)} = 1$ y una sucesión de signos $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}$. Luego, gracias a las acotaciones

$$\Big\|\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha a_\alpha z^\alpha\Big\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_{q_m}^n)} \leqslant \chi_{p,q_m}(\mathcal{P}({}^m\mathbb{C}^n)) \sim 1,$$

$$\Big\|\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha a_\alpha z^\alpha\Big\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_\infty^n)} \leqslant \chi_{p,\infty}(\mathcal{P}({}^m\mathbb{C}^n)) \ll n^{m(\frac{1}{p}+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}},$$

y usando (2.23) y el *Teorema de interpolación multilineal* 1.4.1 para la forma multilineal asociada a $\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha a_\alpha z^\alpha$, se sigue para todo $\theta \in (0,1)$ y $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_m} + \frac{1-\theta}{\infty}$ que

$$\|\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha a_\alpha z^\alpha\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_q^n)} \ll n^{(1-\theta)[m(\frac{1}{p}+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}]} = n^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}.$$

Para las cotas inferiores, sea $P(z) = \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha z^\alpha$ un polinomio unimodular como en (2.20) con $p \geqslant 2$, luego si $w = (\frac{1}{n^{1/q}}, \ldots, \frac{1}{n^{1/q}}) \in S_{\ell_q}$, tenemos que

$$\chi_{p,q}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)) \gg \frac{\|\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} z^\alpha\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)}}{\|\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha z^\alpha\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}} \gg \frac{|\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} w^\alpha|}{n^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}}} \gg \frac{n^{m(1-\frac{1}{q})}}{n^{m(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}}} = n^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}.$$

•(III) : Para $[\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{p} \ \wedge \ \frac{1}{q} \leqslant \frac{1}{p}]$ tomemos $\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{q}$. Notemos que $\frac{1}{r} \geqslant 1 - \frac{1}{p}$. Luego, por la Proposición 2.2.6 y el Teorema 2.2.5 (D), vale

$$B_{r,q}^m(n) \sim 1 \ , \ A_{p,r}^m(n) \sim n^{(m-1)(1-\frac{1}{q})+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},$$

y por lo tanto

$$\chi_{p,q}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)) \ll n^{(m-1)(1-\frac{1}{q})+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Como en (II) usaremos el *Teorema de interpolación multilineal*: tomemos un polinomio $P = \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} a_\alpha z^\alpha$ con $\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} = 1$ y la sucesión de signos $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha\in\Lambda(m,n)}$. Gracias a que

$$\Big\| \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha a_\alpha z^\alpha \Big\|_{\mathcal{P}(^m\ell_{q_m}^n)} \leqslant \chi_{p,q_m}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)) \sim 1,$$

$$\Big\| \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha a_\alpha z^\alpha \Big\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \leqslant \chi_{p,p}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)) \sim n^{(m-1)(1-\frac{1}{p})},$$

tenemos, por (2.23) y el Teorema 1.4.1 que, para todo $\theta \in (0,1)$ y $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_m} + \frac{1-\theta}{p}$, se sigue

$$\Big\| \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha a_\alpha z^\alpha \Big\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)} \ll n^{(1-\theta)[(m-1)(1-\frac{1}{p})]} = n^{(m-1)(1-\frac{1}{q})+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Para la cota inferior, sea $P(z) = \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha z^\alpha$ un polinomio unimodular como en (2.20) con $1 \leqslant p \leqslant 2$, tenemos entonces que

$$\chi_{p,q}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)) \gg \frac{\|\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} z^\alpha\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)}}{\|\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha z^\alpha\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}} \gg \frac{n^{m(1-\frac{1}{q})}}{n^{1-\frac{1}{p}}} = n^{(m-1)(1-\frac{1}{q})+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \qquad \square$$

El estudio que realizamos en el Teorema 4.3.1 supone que el grado de homogeneidad de los polinomios (m) es fijo. En particular, no nos preocupamos en investigar profundamente la dependencia de la constante incondicional mixta en función de m. Por ejemplo, no nos importa la hipercontractividad en las cotas que obtenemos para esta constante. En el Capítulo 5, el Capítulo 6 y el Capítulo7 exploramos objetos y aspectos de algunas familias de funciones holomorfas que requerirán este análisis más profundo para dichas constantes. La hipercontractividad será una propiedad clave.

Capítulo 5

Radio de Bohr

Mientras trabajaba en pos de entender ciertos aspectos de las series de Dirichlet, Harald Bohr consiguió conectarlas con las funciones holomorfas en infinitas variables a través de lo que llamamos *transformada de Bohr*. Este ciclo de ideas llevó a Bohr a preguntarse si es posible comparar el valor absoluto de una serie de potencias en una variable compleja con la suma del valor absoluto de sus coeficientes. Logró probar el siguiente resultado hoy en día denominado *desigualdad de Bohr*:

El radio $r = \frac{1}{3}$ es el valor más grande para el cual vale la siguiente desigualdad:

$$\sum_{n \geqslant 0} |a_n| r^n \leqslant \sup_{z \in \mathbb{D}} |\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n|, \tag{5.1}$$

para toda función holomorfa $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ acotada en el disco unidad $\mathbb{D}$.

De hecho, el artículo de Bohr [Boh14], compilado por G. H. Hardy de correspondencias, indica que Bohr inicialmente obtuvo el radio $\frac{1}{6}$, pero esto fue rápidamente mejorado por M. Riesz, I. Schur, y N. Wiener (independientemente) al resultado ajustado. El artículo de Bohr presenta tanto su propia prueba como la de sus colegas.

5.1. El radio de Bohr n-dimensional

Esta interesante desigualdad se pasó por alto durante muchos años hasta finales del siglo XX. En particular, Dineen y Timoney [DT89], Dixon [Dix95], Boas y Khavinson [KB97], Aizenberg [Aiz00], Boas [Boa00] y Bombieri y Bourgain [BB04] retomaron el trabajo de Bohr y usaron sus ideas en diferentes contextos y/o las generalizaron. Varios de estos autores analizaron un fenómeno similar para las series de potencia en varias variables. En general, fijado un dominio Reinhardt $\mathcal{R}$, consideraremos la noción de *radio de Bohr* para dicho dominio, que notaremos $K(\mathcal{R})$, como el mayor $r \geqslant 0$ de forma que para toda función analítica $f(z) = \sum_{alpha} a_{alpha} z^{alpha}$ y acotada en $\mathcal{R}$, vale que

$$\sup_{z \in r \cdot \mathcal{R}} \sum_{\alpha} |a_\alpha z^\alpha| \leqslant \sup_{z \in \mathcal{R}} |f(z)|.$$

Observemos que con esta notación, la desigualdad de Bohr puede ser formulada simplemente como $K(\mathbb{D}) = \frac{1}{3}$. Sorprendentemente, el valor exacto del radio de Bohr es desconocido para cualquier otro dominio. El resultado central de [KB97, Boa00] contiene una estimación (parcialmente) satisfactoria del radio de Bohr para las bolas de ℓ_p^n, con $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Allí los autores consiguieron, para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$, las siguientes acotaciones asintóticas (ver [Boa00, Theorem 3]),

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{e}} \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{\text{mín}(p,2)}} \leqslant K(B_{\ell_p^n}) \leqslant 3 \left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{1-\frac{1}{\text{mín}(p,2)}}. \tag{5.2}$$

La brecha entre las estimaciones superiores e inferiores en estos artículos condujo en el fuerte interés de calcular el orden asintótico exacto de $K(B_{\ell_p^n})$, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Para obtener las cotas superiores, Boas [Boa00] generalizó un teorema de Kahane-Salem-Zygmund sobre polinomios trigonométricos aleatorios [Kah93, Teorema 4, Cap. 6], que da (mediante el uso de un argumento probabilístico) la existencia de polinomios homogéneos con "coeficientes grandes" y norma uniforme "relativamente pequeña". Bayart refinó esta técnica en [Bay12] de donde extrajimos (2.20).

Las cotas inferiores necesitaron diferentes técnicas. En [DGM03] Defant, García y Maestre relacionaron el radio de Bohr con el estudio de la incondicionalidad en espacios de polinomios homogéneos a través de algunos conceptos de la teoría local de espacios de Banach (ver también [DP06]). Aunque en ese momento esto no proporcionó cotas asintóticas óptimas, esto trajo ideas claves con las que el comportamiento asintótico exacto de $K(B_{\ell_p^n})$ se obtendría.

Fueron Defant, Frerick, Ortega-Cerdá, Ounaïes y Seip [DFOC$^+$11] quienes hicieron una contribución fuera de lo común al problema, dando el valor asintótico exacto de $K(B_{\ell_\infty^n})$. Este trabajo, en cierto sentido, marcó el camino del área en los últimos años. Los autores trajeron al juego la clásica desigualdad de Bohnenblust-Hille, utilizada para calcular el ancho de la brecha en el problema de convergencia de series de Dirichlet de Bohr ochenta años antes. El progreso innovador consistió en demostrar que la constante C_m del Teorema 2.1.2 es, de hecho, *hipercontractiva*. Mostraron que C_m puede tomarse menor o igual que C^m para alguna constante absoluta $C > 0$. Con esto a mano, demostraron que $K(B_{\ell_\infty^n})$ se comporta asintóticamente como $\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}$.

De hecho, se puede decir mucho más sobre $K(B_{\ell_\infty^n})$: Bayart, Pellegrino y Seoane [BPSS14] utilizaron estas técnicas de una manera increíblemente ingeniosa para probar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{K(B_{\ell_\infty^n})}{\sqrt{\frac{\log(n)}{n}}} = 1.$$

Gracias a que $K(B_{\ell_\infty^n})$ acota por debajo el radio $K(\mathcal{R})$ para cualquier otro dominio de Reinhardt $\mathcal{R}$, es posible conseguir fácilmente el comportamiento asintótico de $K(B_{\ell_p^n})$ para $p \geqslant 2$. La solución para el caso $p < 2$ requirió de métodos bastante diferentes. Un famoso teorema demostrado de manera independiente por Pisier [Pis86] y Schütt [Sch78] permite estudiar bases incondicionales en espacios de formas multilineales en términos de algunos invariantes, como la estructura incondicional local o la propiedad de Gordon-Lewis. Estos resultados tienen su contrapartida en el contexto de espacios de polinomios como se muestra en [DDGM01], reemplazando el producto tensorial completo por el simétrico.

Defant y Frerick [DF11] (continuando su trabajo de [DF06]) establecieron una especie de extensión del resultado Pisier-Schütt al producto tensorial simétrico con cotas precisas y dieron una nueva estimación de la constante de Gordon-Lewis del producto tensorial simétrico. Como consecuencia, encontraron el crecimiento asintótico exacto para el radio de Bohr en la bola unitaria de los espacios ℓ_p^n.

Los resultados antes mencionados dan la siguiente relación para el radio de Bohr.

Teorema 5.1.1. *[DFOC+11, DF11] Para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*, vale que*

$$K(B_{\ell_p^n}) \sim \left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min\{p,2\}}}. \tag{5.3}$$

El cálculo del comportamiento asintótico exacto de $K(B_{\ell_p^n})$ dado en [DF11] para $p < 2$ utiliza "maquinaria sofisticada" de la teoría local de espacios de Banach (como mencionamos antes). Inspirados por los resultados recientes de la teoría general de series de Dirichlet, en [BDS19] Bayart, Defant y Schlüters dan estimaciones superiores para las constantes de incondicionalidad de la base monomial del espacio de polinomios homogéneos en ℓ_p, que evitan el uso de esta "maquinaria". Esta perspectiva proporciona una nueva y, en cierto sentido, más clara prueba del Teorema 5.1.1 para el caso $p < 2$.

5.2. Radio de Bohr mixto

En este capítulo pretendemos continuar el estudio del radio de Bohr mixto para dominios de Reinhardt. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos dominios Reinhardt en $\mathbb{C}^n$. El radio de Bohr mixto $K(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ se define como el número más grande $r \geqslant 0$ tal que para cada función analítica $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha z^\alpha$ y acotada en $\mathcal{R}$, vale:

$$\sup_{z \in r \cdot \mathcal{S}} \sum_{\alpha} |a_\alpha z^\alpha| \leqslant \sup_{z \in \mathcal{R}} |f(z)|. \tag{5.4}$$

Nos enfocaremos en el caso en que $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son las bolas unitarias cerradas de ℓ_p^n y ℓ_q^n respectivamente, con $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Notemos que usando esta nueva notación $K(B_{\ell_p^n})$ es exactamente $K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_p^n})$. El siguiente teorema da el comportamiento asintótico correcto de $K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n})$ para todo el rango de p's y q's.

Teorema 5.2.1. *Sea $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, con $q \neq 1$. El crecimiento asintótico del radio de Bohr (p,q)-mixto está dado por*

$$K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) \sim \begin{cases} 1 & \text{si (I): } 2 \leqslant p \leqslant \infty \ \wedge \ \frac{1}{2} + \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{q}, \\ \frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} & \text{si (II): } 2 \leqslant p \leqslant \infty \ \wedge \ \frac{1}{2} + \frac{1}{p} > \frac{1}{q}, \\ \frac{\log(n)^{1-\frac{1}{p}}}{n^{1-\frac{1}{q}}} & \text{si (III): } 1 \leqslant p \leqslant 2. \end{cases}$$

Para $q = 1$ y todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) \sim 1$.

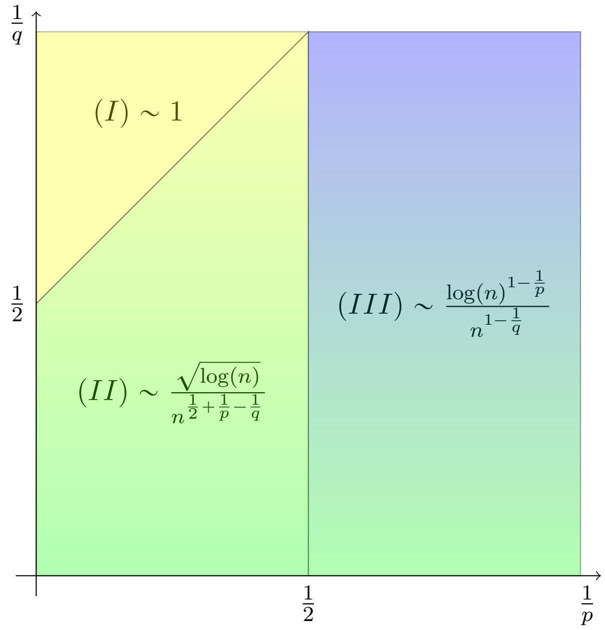

Figura 5.1: Resumen gráfico del radio de Bohr mixto descrito en el Teorema 5.2.1.

Como en el caso de $K(B_{\ell_p^n})$, las cotas superiores del Teorema 5.2.1 se obtienen utilizando polinomios aleatorios con coeficientes adecuados y norma relativamente pequeña [Boa00, DGM04, Bay12]. Para obtener las cotas inferiores, la prueba se divide en varios casos. Para $p < 2$, hemos combinado una forma apropiada de dividir y distinguir ciertos subconjuntos de monomios y gracias a la *desigualdad de Bayart-Defant-Schlütters* en (2.9) conseguimos buenas cotas de las constantes de incondicionalidad de espacios de polinomios homogéneos en ℓ_p para la base monomial. La interacción entre la convergencia monomial y la incondicionalidad mixta para espacios de polinomios homogéneos dada por el Teorema 4.2.3 (que, por supuesto, proporciona información sobre el radio de Bohr) es crucial para el caso $p > 2$. También usaremos fuertemente las descripciones de $monH_\infty(B_{\ell_p})$ para $p \geqslant 2$ dadas por (3.9) y el Teorema 3.2.3. Por lo tanto, vale la pena señalar que las técnicas y los resultados desarrollados en los últimos años fueron fundamentales para lograr este resultado.

Siguiendo la notación de [BDS19], dado un subconjunto $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}(m,n)$, definimos

$$\mathcal{J}^* = \{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n) : \text{ existe } k \geqslant 1, (\mathbf{j},k) \in \mathcal{J}\}.$$

5.3. Radio de Bohr mixto homogéneo e incondicionalidad mixta

Recordemos que $K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n})$ es el radio de Bohr (p,q)-mixto n-dimensional. Esto es, $K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n})$ denota al mayor radio $r > 0$ tal que para toda función analítica $f = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$ en n variables complejas, tenemos la siguiente desigualdad (mixta) de tipo Bohr

$$\sup_{z \in r \cdot B_{\ell_q^n}} \sum_\alpha |a_\alpha z^\alpha| \leqslant \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} |f(z)|.$$

Del mismo modo, el radio de Bohr mixto m-homogéneo , $K_m(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n})$, se define como el más grande $r > 0$ tal que para todo $P(z) = \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} a_\alpha z^\alpha \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ se sigue

$$\sup_{z \in B_{\ell_q^n}} \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |a_\alpha z^\alpha| r^m = \sup_{z \in B_{\ell_q^n}} |\sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} a_\alpha z^\alpha| \leqslant \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}.$$

Es claro que $K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) \leqslant K_m(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n})$.

Observación 5.3.1.

$$K_m(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) = \frac{1}{\chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n))^{1/m}}.$$

Demostración. Dado $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y para toda sucesión $(\theta_\alpha)_{\alpha \in \Lambda(m,n)}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\| \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} \theta_\alpha a_\alpha(P) z^\alpha \|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)} &\leqslant \| \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |a_\alpha(P) z^\alpha| \|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)} \\
&= \| \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |a_\alpha(P) z^\alpha| (K_m(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}))^m \|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)} \frac{1}{(K_m(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}))^m} \\
&\leqslant \frac{1}{(K_m(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}))^m} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)},
\end{aligned}$$

lo que nos lleva a la desigualdad $\chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n))^{1/m} \leqslant \frac{1}{K_m(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n})}$. Por otro lado, para $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ tomemos $\theta_\alpha = \frac{\overline{a_\alpha(P)}}{|a_\alpha(P)|}$. Luego se sigue que

$$\begin{aligned}
\| \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |a_\alpha(P) z^\alpha| \|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)} &= \| \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} \theta_\alpha a_\alpha(P) z^\alpha \|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)} \\
&\leqslant \chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n)) \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)},
\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$\sup_{z\in B_{\ell_q^n}} \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} |a_\alpha z^\alpha| \left(\frac{1}{\chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n))^{1/m}} \right)^m \leqslant \|P\|_{\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)},$$

lo que implica $\frac{1}{\chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n),\mathcal{P}(^m\ell_q^n))^{1/m}} \leqslant K_m(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n})$. □

Será útil recordar un resultado clásico debido a F. Wiener (ver [KB97]) que asegura que para toda función holomorfa f escrita como suma de polinomios m-homogéneos como $f = \sum_{m\geqslant 1} P_m + a_0$ y tal que $\sup_{z\in B_{\ell_p^n}} |f(z)| \leqslant 1$ se tiene

$$\|P_m\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \leqslant 1 - |a_0|^2, \tag{5.5}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

En general esta desigualdad es presentada para la norma uniforme en el polidisco (i.e., $p = \infty$) $\|\cdot\|_{\mathcal{P}(^m\ell_\infty^n)}$, pero esta versión se sigue fácilmente con una modificación estándar del argumento original (para $z \in B_{\ell_p^n}$ hay que considerar la función auxiliar $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ dada por $g(w) := f(w \cdot z)$).

El siguiente lema es una adaptación del caso $p = q$, (ver [DGM03, Theorem 2.2.]) y constituye una conexión básica entre el radio de Bohr y la constante de incondicionalidad para espacios de polinomios homogéneos en el contexto mixto (p no necesariamente igual a q).

Lema 5.3.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ se tiene que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\frac{1}{\sup_{m\geqslant 1}\chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n))^{1/m}} &\leqslant K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) \\ &\leqslant \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{\sup_{m\geqslant 1}\chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n))^{1/m}}\right\}. \end{aligned}$$

Demostración. De la Observación 5.3.1 se concluye que

$$K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) \leqslant \inf_{m\geqslant 1} \frac{1}{\chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n))^{1/m}} = \frac{1}{\sup_{m\geqslant 1}\chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n))^{1/m}},$$

y gracias a la desigualdad de Bohr sabemos que $K(\mathbb{D}) = \frac{1}{3}$. Como es claro que $K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) \leqslant K(\mathbb{D})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos la desigualdad del lado derecho. Para el lado izquierdo tomemos alguna función holomorfa f, sin perdida de generalidad podemos asumir que $\sup_{z\in B_{\ell_p^n}} |f(z)| = 1$, y consideremos su descomposición como suma de polinomio m-homogéneos: $f = \sum_{m\geqslant 0} P_m$. Para todo $m \in \mathbb{N}_0$ vale que $P_m(z) = \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} a_\alpha(f) z^\alpha$ luego, tomando $\rho = \sup_{m\geqslant 1} \chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n))^{1/m}$ y usando la Observación 5.3.1 se sigue que

$$\Big\| \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} |a_\alpha(f)| \left(\frac{z}{\rho}\right)^\alpha \Big\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)} \leqslant \Big\| \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} a_\alpha(f) z^\alpha \Big\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}.$$

Aplicando el resultado de Wiener antes mencionado para $w \in B_{\ell_q^n}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{m \geqslant 0} \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |a_\alpha(f)| \left(\frac{w}{3\rho}\right)^\alpha &\leqslant |a_0(f)| + \sum_{m \geqslant 1} \frac{1}{3^m} \Big\| \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} a_\alpha(f) z^\alpha \Big\|_{\mathcal{P}(^m \ell_p^n)} \\
&\leqslant |a_0(f)| + \sum_{m \geqslant 1} \frac{1}{3^m} (1 - |a_0(f)|^2) \\
&\leqslant |a_0(f)| + \frac{1 - |a_0(f)|^2}{2} \\
&\leqslant 1 = \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} |f(z)|,
\end{aligned}$$

donde la ultima desigualdad se debe a que $|a_0(f)| \leqslant \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} |f(z)| = 1$. La última cadena de desigualdades y la maximalidad del radio de Bohr mixto nos permiten concluir que $\frac{1}{3\rho} \leqslant K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n})$ como queríamos probar. $\square$

El lema previo muestra que entender $K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n})$ se traduce en ver cómo se comporta la constante $\chi_M(\mathcal{P}(^m \ell_p^n), \mathcal{P}(^m \ell_q^n))^{1/m}$. Desafortunadamente, el resultado sobre el crecimiento asintótico de la constante de incondicionalidad mixta $\chi_M(\mathcal{P}(^m \ell_p^n), \mathcal{P}(^m \ell_q^n))$ (para m fijo) dado en el Teorema 4.3.1 no es útil aquí. Como podemos ver en el Lema 5.3.2, necesitamos entender cómo el valor de $\chi_M(\mathcal{P}(^m \ell_p^n), \mathcal{P}(^m \ell_q^n))^{1/m}$ crece moviendo ambas, el número de variables (n) y el grado de homogeneidad (m). Pero más allá de esto, dicho resultado da una pauta de lo que se uno debe esperar (por lo menos cómo deberían ser las regiones en la Figura 5.1).

La heurística para interpretar las diferentes regiones en el Teorema 5.2.1 es la siguiente: si asumimos que el grado de homogeneidad es muy grande ($m \to \infty$) en el Teorema 4.3.1, luego el gráfico en la Figura 4.1 se transforma en aquel presentado en la Figura 5.1. Todo esto, junto con las cotas superiores que podemos obtener luego de usar polinomios aleatorios clásicos (ver la Sección 5.4, de alguna manera la parte sencilla) nos ayuda a definir a dónde apuntar para probar las cotas inferiores.

5.4. Cotas superiores

Las cotas superiores constituyen la parte fácil: utilizaremos el enfoque probabilístico clásico.

También necesitaremos la siguiente observación, que es un ejercicio de cálculo sencillo.

Observación 5.4.1. Para todo par de números positivos $a, b > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, la función $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := x^a n^{\frac{b}{x}}$ alcanza su máximo en $x = \log(n) \frac{b}{a}$.

Demostración de las cotas superiores en el Teorema 5.2.1. Las cotas superiores para el caso $\frac{1}{p} + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{q}$ y $q = 1$ en el Teorema 5.2.1 son triviales.

Supongamos ahora que $\frac{1}{p} + \frac{1}{2} > \frac{1}{q}$ y tomemos una sucesión de signos $(\varepsilon_\alpha)_{\alpha \in \Lambda(m,n)} \subset \{-1, 1\}$ tal que

$$\Big\| \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha \frac{m!}{\alpha!} z^\alpha \Big\|_{B_{\ell_p^n}} \leqslant K_{m,p}\, n^{1-\frac{1}{p}},$$

como en (2.20) donde, en este caso, $K_{m,p} \leqslant C \log(m)^{1-\frac{1}{p}} m!^{1-\frac{1}{p}}$. Tomando $z_0 = (\frac{1}{n^{1/q}}, \ldots, \frac{1}{n^{1/q}}) \in B_{\ell_q}$ podemos concluir que

$$\begin{aligned}
n^{m(1-\frac{1}{q})} &= \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} \frac{m!}{\alpha!} \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{q}}} \right)^m \\
&\leqslant \Big\| \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |\varepsilon_\alpha| \frac{m!}{\alpha!} z^\alpha \Big\|_{B_{\ell_q^n}} \\
&\leqslant \chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n)) \Big\| \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha \frac{m!}{\alpha!} z^\alpha \Big\|_{B_{\ell_p^n}} \\
&\leqslant \chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n))\, K_{m,p}\, n^{1-\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n))\, C \log(m)^{1-\frac{1}{p}} m!^{1-\frac{1}{p}}\, n^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Para $p < 2$ tenemos, usando la *fórmula de Stirling* en (2.16), que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n))^{1/m}} &\leqslant \left(C n^{\frac{1}{p'}}\, (\log(m) m!)^{\frac{1}{p'}} \right)^{1/m} \frac{1}{n^{\frac{1}{q'}}} \\
&\leqslant C \frac{1}{n^{\frac{1}{q'}}} m^{\frac{1}{p'}} n^{\frac{1}{p'm}}.
\end{aligned}$$

Gracias al Lema 5.3.1, la Observación 5.4.1 y la desigualdad previa tenemos

$$K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) \leqslant C \frac{1}{n^{\frac{1}{q'}}} \inf_{m \geqslant 1} m^{\frac{1}{p'}} n^{\frac{1}{p'm}} \leqslant C \frac{\log(n)^{\frac{1}{p'}}}{n^{\frac{1}{q'}}}.$$

Por otro lado, para $p \geqslant 2$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{2} > \frac{1}{q}$ se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n)))^{1/m}} &\leqslant \left(C n^{\frac{1}{2}}\, (\log(m) m!)^{\frac{1}{2}} \right)^{1/m} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \\
&\leqslant C \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2m}}.
\end{aligned}$$

Así, minimizando $m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2m}}$ como en el caso anterior, conseguimos

$$K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) \leqslant C \frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}},$$

como queríamos demostrar. □

5.5. Cotas inferiores

Para probar las cotas inferiores debemos considerar cuatro casos diferentes. Comenzamos con el caso $q = 1$ y el caso $p \leqslant q$, que son los más fáciles. Luego estudiamos el caso $1 < q \leqslant p \leqslant 2$ donde usamos herramientas de incondicionalidad y finalmente el caso $p \geqslant 2$ donde la herramienta clave es la convergencia monomial.

5.5.1. El caso $q = 1$

En el artículo [Aiz00] se prueba que $K(B_{\ell_1^n}) \sim 1$. Luego, para cualquier $f(z) = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha$, se sigue que

$$\sup_{z \in K(B_{\ell_1^n}) \cdot B_{\ell_1^n}} \sum_\alpha |a_\alpha z^\alpha| \leqslant \sup_{z \in B_{\ell_1^n}} |f(z)| \leqslant \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} |f(z)|,$$

lo que implica que $K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_1^n}) \geqslant K(B_{\ell_1^n}) \sim 1$.

5.5.2. El caso $p \leqslant q$

En este caso usaremos fuertemente el Teorema 5.1.1. El caso $p \leqslant q$ es corolario sencillo de este resultado. Para cualquier $P(z) = \sum\limits_{\alpha \in \Lambda(m,n)} a_\alpha z^\alpha$, vale que

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |a_\alpha| z^\alpha \Big\|_{\mathcal{P}(^m\ell_q^n)} &\leqslant n^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \Big\| \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |a_\alpha| z^\alpha \Big\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \\ &\leqslant n^{m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} K(B_{\ell_p^n})^{-m} \Big\| \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} a_\alpha z^\alpha \Big\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}, \end{aligned}$$

lo que implica que $K_m(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) \geqslant K(B_{\ell_p^n}) n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Usando el Lema 5.3.2 y el Teorema 5.1.1 tenemos, para $p \leqslant 2$,

$$K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) \geqslant \frac{1}{3} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} K(B_{\ell_p^n}) \sim n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}} = \frac{\log(n)^{1-1/p}}{n^{1-1/q}},$$

y, para $p \geqslant 2$,

$$K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) \geqslant \frac{1}{3} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} K(B_{\ell_p^n}) \sim n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\log(n)}}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}.$$

Esto concluye la prueba.

5.5.3. La descomposición acotada. El caso $1 < q < p \leqslant 2$

Para demostrar que la cota inferior es correcta en este rango de valores, introducimos la primera descomposición monomial de la tesis: la descomposición acotada. En este caso, dividimos el conjunto completo de monomios $(z_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)}$ en subconjuntos según el grado máximo de sus variables. Esta partición nos permite maneja alguna cotas técnicas de una manera más sutil.

El siguiente lema es el primer paso que necesitamos para probar la cota inferior del Teorema 5.2.1 en este caso. Una pieza fundamental en su prueba será la *desigualdad BDS*.

Lema 5.5.1. *Sea* $1 \leqslant q < p \leqslant 2$*, entonces vale que*

$$\chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n)) \leqslant me^{1+\frac{m-1}{p}} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} |\mathbf{j}|^{(1/p-1/q)q'} \right)^{1/q'}.$$

Demostración. Fijemos $P \in \mathcal{P}(^m\ell_p^n)$ y $u \in \ell_q^n$. Luego, por la *desigualdad BDS* en (2.9), para cualquier $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)^*$ tenemos

$$\left(\sum_{k:\ (\mathbf{j},k) \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{(\mathbf{j},k)}(P)|^{p'} \right)^{1/p'} = \left(\sum_{k=j_{m-1}}^{n} |c_{(\mathbf{j},k)}(P)|^{p'} \right)^{1/p'} \leqslant me^{1+\frac{m-1}{p}} |\mathbf{j}|^{1/p} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}.$$

Ahora, aplicando la anterior desiguladad, la desigualdad de Hölder (dos veces) y la fórmula multinomial se sigue

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P)||u_{\mathbf{j}}| &= \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)^*} \left(\sum_{k:\ (\mathbf{j},k) \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{(\mathbf{j},k)}||u_{\mathbf{j}}||u_k| \right) \\
&\leqslant \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)^*} |u_{\mathbf{j}}| \left(\sum_{k:\ (\mathbf{j},k) \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{(\mathbf{j},k)}|^{q'} \right)^{1/q'} \left(\sum_k |u_k|^q \right)^{1/q} \\
&\leqslant \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)^*} |u_{\mathbf{j}}| \left(\sum_{k:\ (\mathbf{j},k) \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{(\mathbf{j},k)}|^{p'} \right)^{1/p'} \|u\|_q \\
&\leqslant me^{1+\frac{m-1}{p}} \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)^*} |\mathbf{j}|^{1/p} |u_{\mathbf{j}}| \|u\|_q \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \\
&\leqslant me^{1+\frac{m-1}{p}} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)^*} |\mathbf{j}||u_{\mathbf{j}}|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)^*} |\mathbf{j}|^{(1/p-1/q)q'} \right)^{1/q'} \|u\|_q \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \\
&\leqslant me^{1+\frac{m-1}{p}} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} |\mathbf{j}||u_{\mathbf{j}}|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} |\mathbf{j}|^{(1/p-1/q)q'} \right)^{1/q'} \|u\|_q \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \\
&= me^{1+\frac{m-1}{p}} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} |\mathbf{j}|^{(1/p-1/q)q'} \right)^{1/q'} \|u\|_q^m \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)},
\end{aligned}$$

lo cual da la desigualdad deseada. □

La clave para probar las cotas inferiores es obtener buenas estimaciones de la suma en el lado derecho de la desigualdad del lema previo.

Lema 5.5.2. *Sea $1 < q \leqslant p \leqslant 2$, para n suficientemente grande se sigue que*

$$\left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} |\mathbf{j}|^{(1/p-1/q)q'} \right)^{1/q'} \leqslant C^m \frac{n^{m/q'}}{\log(n)^{m/p'}},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Con esto a mano es fácil probar las restantes cotas inferiores para $p \leqslant 2$ en el Teorema 5.2.1.

Demostración de las cotas inferiores para el caso $1 < q < p \leqslant 2$ en el Teorema 5.2.1. Gracias al Lema 5.3.2 es suficiente probar que

$$\frac{\log(n)^{1-1/p}}{n^{1-1/q}} \ll \frac{1}{\sup_{m \geqslant 1} \chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n))^{1/m}} = \inf_{m \geqslant 1} \frac{1}{\chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n))^{1/m}}, \quad (5.6)$$

lo cual sigue del Lema 5.5.1 y el Lema 5.5.2. □

La prueba del Lema 5.5.2 requerirá un poco de trabajo y la visión dada por una descomposición monomial específica, la *descomposición acotada*. La idea de esta descomposición es dividir el conjunto de monomios en aquellos que tienen los grados de todas sus variables acotadas (por algún valor útil) y aquellos que no.

La descomposición monomial acotada: Definimos para todo $1 \leqslant k \leqslant m$ el *conjunto de índices k-acotado* as

$$\Lambda_k(m,n) = \{\alpha \in \Lambda(m,n) : \alpha_i \leqslant k \text{ para todo } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Recordemos que F es la función inyectiva que relaciona $\Lambda(m,n)$ y $\mathcal{J}(m,n)$, denotamos

$$\mathcal{J}_k(m,n) = F^{-1}(\Lambda_k(m,n)),$$

al correspondiente conjunto de índices k-acotado visto dentro de $\mathcal{J}(m,n)$. Observemos que para todo $1 \leqslant k \leqslant m$ y $\mathbf{j} \in \mathcal{J}_k(m,n)$ valen las siguientes desigualdades:

$$|\mathbf{j}| \geqslant \frac{m!}{k!^{\lceil \frac{m}{k} \rceil}} \geqslant \frac{m!}{k!^{\frac{m}{k}+1}} \geqslant C^m \frac{m^m}{k^{m+k}}, \quad (5.7)$$

$$\left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} |\mathbf{j}|^{(1/p-1/q)q'} \right)^{1/q'} \leqslant m^{1/q'} \max_{k=1,\dots,m-1} \left\{ \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}_k(m-1,n) \cap \mathcal{J}_{k-1}^c(m-1,n)} |\mathbf{j}|^{(1/p-1/q)q'} \right)^{1/q'} \right\}. \quad (5.8)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}|\mathcal{J}_{k-1}^c(m-1,n)| &\leqslant n|\mathcal{J}(m-k-1,n)| \\ &\leqslant n\binom{n+m-k-2}{m-k-1} \leqslant n\frac{(n+m-k-2)^{m-k-1}}{(m-k-1)!},\end{aligned} \tag{5.9}$$

ya que todo $\mathbf{j} \in \mathcal{J}_{k-1}^c(m-1,n)$ requiere que por lo menos una de las variables esté a la potencia k (notemos que esta cota es excesiva, dado que hay muchas repeticiones a la hora de contar, pero será adecuada para nuestros propósitos). Para el caso particular en que $m \leqslant n$ podemos extraer de la desigualdad (5.9) el siguiente hecho

$$|\mathcal{J}_{k-1}^c(m-1,n)| \leqslant 2^m \frac{n^{m-k}}{(m-k-1)!}. \tag{5.10}$$

Estamos listos para probar el Lema 5.5.2.

Demostración del Lema 5.5.2. Supongamos que n es suficientemente grande como para que

$$\log(n)^c \leqslant n, \tag{5.11}$$

donde $c > 0$ es una constante que especificaremos luego.

Separaremos la prueba en dos casos.

• (i) $m \leqslant \log(n)^{\frac{q'}{p'}}$.

Notemos que tomando en (5.11) $c \geqslant \frac{q'}{p'}$, entonces $m \leqslant n$. Así, por (5.7) y (5.10), para cada $1 \leqslant k \leqslant m-1$, tenemos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}_k(m-1,n)\cap\mathcal{J}_{k-1}^c(m-1,n)} |\mathbf{j}|^{(1/p-1/q)q'}\right)^{1/q'} &\leqslant C^m |\mathcal{J}_{k-1}^c(m-1,n)|^{1/q'} \frac{k^{(m+k)(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}}{m^{m(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}} \\ &\leqslant C^m \left(\frac{n^{m-k}}{(m-k-1)!}\right)^{\frac{1}{q'}} \frac{k^{(m+k)(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}}{m^{m(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}}.\end{aligned}$$

Gracias a (5.8), probaremos el lema si podemos mostrar que la última expresión es menor o igual que $C^m \frac{n^{m/q'}}{\log(n)^{m/p'}}$, para alguna constate $C > 0$. Por lo tanto, es suficiente probar que, si $\beta := (\frac{1}{q} - \frac{1}{p})q'$, vale

$$\frac{k^{\beta(m+k)}}{(m-k-1)!m^{\beta m}} \leqslant C^m \frac{n^k}{\log(n)^{m(\beta+1)}}. \tag{5.12}$$

Supongamos primero que $k \geqslant \text{mín}\{m/2, \frac{m}{3\beta}\} = dm$ para algún $0 < d < 1$. Notemos que el lado izquierdo es menor o igual que $m^{\beta m}$ que, a su vez, es menor o igual que $\frac{n^{dm}}{\log(n)^{m(\beta+1)}}$ si elegimos $cd > \beta(\frac{q'}{p'} + 1) + 1$ en (5.11) ya que $m \leqslant \log(n)^{\frac{q'}{p'}}$. Vale entonces (5.12) para $k \geqslant dm$.

En el caso en que $k \leqslant dm$, la desigualdad (5.12) es equivalente a

$$\frac{k^{\beta(m+k)}}{m^{m-k}m^{\beta m}} \leqslant C^m \frac{n^k}{\log(n)^{m(\beta+1)}}, \tag{5.13}$$

para alguna constante C. Si $k = 1$ (5.13) es trivialmente satisfecha. Sea $1 < k \leqslant dm$. Usando cálculo elemental, se puede mostrar que $k^{\beta k}m^k/k^m \leqslant k^{m/3}m^k/k^m = m^k/k^{2m/3} \ll 1$ para $k \leqslant m/2$. Luego, es suficiente probar que

$$\frac{k^{(\beta+1)m}}{m^{(\beta+1)m}} \leqslant C^m \frac{n^k}{\log(n)^{m(\beta+1)}}.$$

Tomando logaritmo, vemos que basta con mostrar, para cierta constante $C > 0$, que vale

$$f(\frac{k\log(n)}{m}) - \frac{k\log(n)}{m} \leqslant C, \tag{5.14}$$

donde $f(t) = (\beta+1)\log(t)$. Notemos que existe $t_0 = t_0(\beta) \geqslant 1$ tal que $f(t) \leqslant t^{1/2}$ para todo $t \geqslant t_0$. Si $\frac{k\log(n)}{m} \geqslant t_0$ entonces $f(\frac{k\log(n)}{m}) - \frac{k\log(n)}{m} \leqslant \sqrt{\frac{k\log(n)}{m}} - \frac{k\log(n)}{m} \leqslant 0$, y (5.14) se satisface. Por otro lado, si $\frac{k\log(n)}{m} \leqslant t_0$ entonces (5.14) se satisface tomando $C = f(t_0)$.

• (ii) Para $m \geqslant \log(n)^{\frac{q'}{p'}}$ simplemente acotamos $|\mathbf{j}|^{(1/p-1/q)q'}$ por 1, luego gracias a la fórmula de Stirling,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-1,n)} |\mathbf{j}|^{(1/p-1/q)q'}\right)^{1/q'} &\leqslant |\mathcal{J}(m-1,n)|^{1/q'} \\
&= \left(\frac{(n+m-2)!}{(m-1)!(n-1)!}\right)^{1/q'} \\
&\leqslant C^m \left(\left(1+\frac{n}{m-1}\right)^{m-1}\right)^{1/q'} \\
&\leqslant C^m \left(1+\frac{n}{\log(n)^{\frac{q'}{p'}}}\right)^{\frac{m-1}{q'}} \\
&\leqslant C^m \frac{n^{\frac{m}{q'}}}{\log(n)^{\frac{m}{p'}}},
\end{aligned}$$

esto concluye la demostración. □

5.5.4. El caso $p \geqslant 2$

Para los casos restantes será crucial el punto de vista de la convergencia monomial y su conexión con la incondicionalidad mixta.

Demostración para el caso $\frac{1}{2} + \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{q}$ en el Teorema 5.2.1. Gracias a la ecuación (3.9), si $\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$ y $p \geqslant 2$, se sigue

$$\ell_r \cap B_{\ell_p} \subset monH_\infty(B_{\ell_p}).$$

Como $q \leqslant r \leqslant p$ vale que $B_{\ell_q} \subset B_{\ell_r} \subset B_{\ell_p}$ y luego tenemos $B_{\ell_q} \subset \ell_r \cap B_{\ell_p} \subset monH_\infty(B_{\ell_p})$. Finalmente por el Teorema 4.2.2 existe una constante $C = C(p,q) > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ y p, q cumpliendo las condiciones previas, vale

$$\frac{1}{\sup\limits_{m \geqslant 1} \left(\chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_p^n), \mathcal{P}(^m\ell_q^n)) \right)^{1/m}} \geqslant C.$$

Como $K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) \leqslant 1$ para todo $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, la desigualdad previa y el Lema 5.3.2 nos llevan a la conclusión que, para $\frac{1}{q} \geqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{2}$, se sigue

$$K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) \sim 1. \tag{5.15}$$

□

Recordemos que el Teorema 3.2.3 da la inclusión

$$B = \left\{ z \in \ell_\infty : \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\log(n)}} \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j^*|^2 \right)^{1/2} < 1 \right\} \subset monH_\infty(B_{\ell_\infty}).$$

Consideremos ahora el espacio de Banach

$$X_\infty = \left\{ z \in \ell_\infty : \sup_{n \geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{\log(n)}} \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j^*|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}, \tag{5.16}$$

dotado de la norma $\|z\|_{X_\infty} = \sup\limits_{n \geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{\log(n)}} \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j^*|^2 \right)^{1/2}$. No es difícil ver que este es un espacio de sucesiones. Observemos además que

$$B_{X_\infty} \subset B \subset monH_\infty(B_{\ell_\infty}). \tag{5.17}$$

Por el Teorema 4.2.2 y la inclusión anterior (5.17) tenemos, para algún $C = C(p) > 0$, que

$$\sup_{n \geqslant 2} \chi_M(\mathcal{P}(^m\ell_\infty^n), \mathcal{P}(^m(X_\infty)_n)) \leqslant C^m. \tag{5.18}$$

La norma en $(X_\infty)_n$ está dada por

$$\|(z_1, \ldots, z_n)\|_{(X_\infty)_n} = \sup_{2 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\sqrt{\log(k)}} \left(\sum_{j=1}^{k} |z_j^*|^2 \right)^{1/2}.$$

Para completar el estudio del radio de Bohr mixto Bohr para $p \geqslant 2$ queda entender el caso $\frac{1}{q} < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$.

Demostración del caso $\frac{1}{q} < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ y $p \geqslant 2$ en el Teorema 5.2.1. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y tomemos $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$, $P(z) = \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} a_\alpha z^\alpha$. Por el Lema 5.3.2, es suficiente probar que existe cierta constante $C > 0$ tal que para todo $z \in B_{\ell_q^m}$ vale

$$\sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |a_\alpha z^\alpha| \leqslant C^m \left(\frac{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}{\sqrt{\log(n)}} \right)^m \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}.$$

Consideremos $y = (z_1^{\frac{p}{p+2}}, \ldots, z_n^{\frac{p}{p+2}})$ y $w = (z_1^{\frac{2}{p+2}}, \ldots, z_n^{\frac{2}{p+2}})$. Es sencillo mostrar que $z = y \cdot w = (y_1 w_1, \ldots, y_n w_n)$, y luego, por (5.18) y la Observación 3.1.5, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |a_\alpha z^\alpha| = \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |a_\alpha w^\alpha y^\alpha| &\leqslant C^m \|y\|_{(X_\infty)_n}^m \|P_w\|_{\mathcal{P}(^m\ell_\infty^n)} \\ &\leqslant C^m \|y\|_{(X_\infty)_n}^m \|w\|_{\ell_p^n}^m \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}.\end{aligned}$$

Ahora basta ver que

$$\|y\|_{(X_\infty)_n} \|w\|_{\ell_p^n} \leqslant C \frac{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}{\sqrt{\log(n)}}.$$

Para empezar, dado $1 \leqslant k \leqslant n$, se sigue que

$$\begin{aligned}\|(y_1^*, \ldots, y_k^*)\|_{\ell_2^k} &= \|(z_1^*, \ldots, z_k^*)\|_{\ell^k_{\frac{2p}{p+2}}}^{\frac{p}{p+2}} \\ &\leqslant \left(\|(z_1^*, \ldots, z_k^*)\|_{\ell_q^k} k^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \right)^{\frac{p}{p+2}} \\ &\leqslant \|z\|_{\ell_q^n}^{\frac{p}{p+2}} \left(k^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \right)^{\frac{p}{p+2}},\end{aligned}$$

con lo cual vale

$$\begin{aligned}\|y\|_{(X_\infty)_n} &= \sup_{2 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\sqrt{\log(k)}} \|(y_1^*, \ldots, y_k^*)\|_{\ell_2^k} \\ &\leqslant \sup_{2 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{\sqrt{\log(k)}} \|z\|_{\ell_q^n}^{\frac{p}{p+2}} \left(k^{\frac{1}{p}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \right)^{\frac{p}{p+2}} \\ &\leqslant C \|z\|_{\ell_q^n}^{\frac{p}{p+2}} \frac{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\frac{p}{p+2}}}{\sqrt{\log(n)}}.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\|w\|_{\ell_p^n} = \|z\|_{\ell^n_{\frac{2p}{p+2}}}^{\frac{2}{2+p}} \leqslant \|z\|_{\ell_q^n}^{\frac{2}{2+p}} n^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\frac{2}{2+p}} = \|z\|_{\ell_q^n}^{\frac{2}{2+p}} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\frac{2}{2+p}}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|y\|_{(X_\infty)_n}\|w\|_{\ell_p^n} &\leqslant C\|z\|_{\ell_q^n}^{\frac{p}{p+2}}\frac{1}{\sqrt{\log(n)}}n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\frac{p}{p+2}}\|z\|_{\ell_q^n}^{\frac{2}{2+p}}n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\frac{2}{2+p}} \\
&= C\|z\|_{\ell_q^n}\frac{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}{\sqrt{\log(n)}},
\end{aligned}$$

como necesitábamos. □

Capítulo 6

Convergencia monomial para $H_b(\ell_r)$

En este capítulo volvemos al estudio de la convergencia monomial. En particular, nos centramos en los conjuntos de convergencia monomial para $H_b(\ell_r)$. En el Teorema 6.2.1 proporcionamos una caracterización completa del conjunto de convergencia monomial del espacio de funciones holomorfas de tipo acotado para $1 < r \leqslant 2$. En la Sección 6.3 lo hacemos para $monH_b(\ell_{r,s})$ y damos cotas inferiores y superiores ajustadas para $monH_b(\ell_{r,s})$, en particular con $r = s$.

La herramienta principal desarrollada es una nueva descomposición de los multi-índices, lo que nos permite construir cualquiera de ellos a partir de dos clases muy particulares (a saber, los tetraedrales y los pares). Un tratamiento adecuado para cada una de estas clases proporciona cotas para la suma de todos los monomios que nos permiten demostrar un comportamiento hipercontractivo para la constante de incondicionalidad mixta entre los espacios adecuados. Esta técnica es sustancialmente diferente de la usual, que involucra una partición de los multi-índices en conjuntos adecuados, como hicimos en la Sección 5.5.3 (ver también, por ejemplo [DFOC$^+$11, BDS19, BDF$^+$17, GMMa, OCOS09]). La diferencia ahora es que estudiando dos subclases de multi-índices que descomponen a cualquiera de ellos (a la manera del teorema fundamental de la aritmética, para hacer una analogía) logramos concluir algo acerca de la suma total.

6.1. La descomposición de factorización

Presentamos ahora la segunda descomposición monomial: la *descomposición de factorización*. Esta descomposición será la herramienta clave para las cotas inferiores en todo el capítulo. Será necesaria las próximas secciones.

Un multi-índice α es *tetraedral* si todas sus entradas son 0 o 1. Consideremos el conjunto de multi-índices tetraedrales

$$\Lambda_T(m,n) = \big\{\alpha \in \Lambda(m,n) : \alpha_i \in \{0,1\} \text{ para todo } i = 1, \dots, n\big\}.$$

Notemos que el conjunto de *multi-índices tetraedrales* es exactamente el conjunto de multi-índices 1-acotados que introdujimos en la Sección 5.5.3, i.e., $\Lambda_T(m,n) = \Lambda_1(m,n)$.

Un multi-índice es llamado *par* si todas sus entradas son pares (observemos que esto fuerza al multi-índice a tener orden par). Consideraremos el conjunto de muli-índices pares

$$\Lambda_E(m,n) = \big\{\alpha \in \Lambda(m,n) : \alpha_i \text{ es par para todo } i = 1,\ldots,n\big\}.$$

Para todo muli-índices par $\alpha \in \Lambda_E(m,n)$ hay un único $\beta \in \Lambda(m/2,n)$ tal que $\alpha = 2\beta$.

Observación 6.1.1. Dado $\alpha \in \Lambda(M,N)$ definimos α_T (la parte tetraedral) y α_E (la parte par) como

$$\big(\alpha_T\big)_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_i \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } \alpha_i \text{ es par} \end{cases} \quad \text{y} \quad \big(\alpha_E\big)_i = \begin{cases} \alpha_i - 1 & \text{si } \alpha_i \text{ es impar} \\ \alpha_i & \text{si } \alpha_i \text{ es par} \end{cases}.$$

Si $0 \leqslant k \leqslant M$ es la cantidad de entradas pares en α, entonces es claro que $\alpha_T \in \Lambda_T(k,N)$ y $\alpha_E \in \Lambda_E(M-k,N)$, además $\alpha = \alpha_T + \alpha_E$. Como $(\alpha_E)_i \leqslant \alpha_i$ para todo i entonces $\alpha_E! \leqslant \alpha!$. Por otro lado, $\alpha_T! = 1$, luego $\alpha_T!\alpha_E! \leqslant \alpha!$, y

$$|[\alpha]| = \frac{M!}{\alpha!} \leqslant \frac{M!}{\alpha_T!\alpha_E!} = \frac{M!}{(M-k)!k!}\frac{k!}{\alpha_T!}\frac{(M-k)!}{\alpha_E!} = \binom{M}{k}|[\alpha_T]||[\alpha_E]| \leqslant 2^M|[\alpha_T]||[\alpha_E]|.$$

6.2. El caso $1 < r \leqslant 2$.

Podemos caracterizar el conjunto de convergencia monomial de $H_b(\ell_r)$ para $1 < r \leqslant 2$. Resulta ser un *espacio de Marcinkiewicz* m_{Ψ_r} con símbolo

$$\Psi_r(n) := \log(n+1)^{1-\frac{1}{r}}, \tag{6.1}$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Teorema 6.2.1. *Dado $1 < r \leqslant 2$ vale*

$$monH_b(\ell_r) = m_{\Psi_r} = \left\{ z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\geqslant 1} \frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-\frac{1}{r}}} < \infty \right\}.$$

Probaremos las inclusión superior y la inferior de manera separada en las dos siguiente secciones.

6.2.1. La inclusión superior $monH_b(\ell_r) \subset m_{\Psi_r}$

Típicamente, la forma de probar la inclusión superior para un conjunto de convergencia monomial consiste en proporcionar polinomios que satisfagan ciertas propiedades convenientes. En los últimos años, las técnicas probabilísticas han demostrado ser extremadamente útiles para encontrar tales polinomios. Esto es, por ejemplo, lo que los autores hacen en [BDF+17, Theorem 2.2], donde el dispositivo probabilístico es la bien conocida desigualdad de Kahane-Salem-Zygmund. Aquí seguiremos esencialmente las mismas líneas, pero usando los polinomios dados por Bayart que se encuentran en (2.20). Estos polinomios dan la principal herramienta para la demostración de la inclusión superior. También necesitamos el siguiente resultado, una extensión de la Proposición 3.1.4 cuya prueba sigue las mismas ideas.

Lema 6.2.2. *Sean $\mathcal{R}$ un dominio de Reinhardt en un espacio de sucesiones X y $(\mathcal{F}, (q_n)_n)$ un espacio de Fréchet de funciones holomorfas continuamente incluido en $H_b(\mathcal{R})$. Luego, para todo $z \in mon(\mathcal{F})$, existen $C > 0$ y n tal que*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha z^\alpha| \leqslant C q_n(f).$$

para todo $f \in \mathcal{F}$. En particular, si $z \in monH_b(X)$, existe $C > 0$, tal que

$$\sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |c_\alpha(P) z^\alpha| \leqslant C^m \|P\|_{\mathcal{P}(^m X)},$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^m X)$.

Demostración. Dado $z \in \mathcal{R}$ cumpliendo (3.6) es fácil ver que vale $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(f) z^\alpha| < \infty$ para toda $f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$. Para la otra implicación consideremos el operador lineal

$$\begin{aligned} \Phi_z : \mathcal{F}(\mathcal{R}) &\to \ell_1\left(\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}\right) \\ f &\mapsto (a_\alpha(f) z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}, \end{aligned}$$

que esta bien definido ya que $z \in mon\mathcal{F}(\mathcal{R})$. Dada una sucesión $f_n \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ tal que $f_n \to f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ y $\Phi_z(f_n) \to b = (b_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ tenemos, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$, que $a_\alpha(f_n) \to b_\alpha$. La Observación 3.1.3 vale también para $H_b(X)$ (con la misma demostración), usando que $a_\alpha(f_n) \to a_\alpha(f)$, y gracias a la unicidad del límite $b = \Phi_z(f)$ el gráfico de Φ_z es cerrado. Usando el Teorema del gráfico cerrado para espacios de Frechet se sigue que Φ_z es continuo, que es exactamente lo que queríamos. Apliquemos esto al caso de un polinomio m-homogéneo P en X y $z \in monH_b(X)$. Gracias a que $P \in H_b(X)$ y las seminormas en $H_b(X)$ están dadas por $(\|\cdot\|_{n \cdot B_X})_{n \in \mathbb{N}}$, para un número $N \in \mathbb{N}$ fijo y $\tilde{C} > 1$ tenemos que

$$\sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |c_\alpha(P) z^\alpha| \leqslant \tilde{C} \|P\|_{N \cdot B_X} \leqslant \tilde{C} N^m \|P\|_{B_X}.$$

Tomando $C = \tilde{C}N$ tenemos lo que queríamos probar. ☐

Tenemos ahora todo lo necesario para proceder a probar la inclusión superior.

Demostración de la inclusión superior en el Teorema 6.2.1. Fijemos $1 < r \leqslant 2$ y sea $z \in monH_b(\ell_r)$. Ahora, fijados $n, m \in \mathbb{N}$, elijamos signos $(\varepsilon_\alpha)_{\Lambda(m,n)}$ como en (2.20) y consideremos el polinomio $P(w) := \sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} \varepsilon_\alpha \frac{m!}{\alpha!} w^\alpha$. Por el Corolario 3.3.6 sabemos que

$z^* \in monH_b(\ell_r)$. Usando la fórmula multinomial, el Lema 6.2.2 y (2.20) tenemos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n}|z_j^*|\right)^m &= \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)}\frac{m!}{\alpha!}|(z^*)^\alpha| = \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)}\left|\varepsilon_\alpha\frac{m!}{\alpha!}(z^*)^\alpha\right| \\ &\leqslant C_{z^*}^m \sup_{u\in B_{\ell_r^n}}\left|\sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)}\varepsilon_\alpha\frac{m!}{\alpha!}u^\alpha\right|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \leqslant C_{z^*,r}^m(\log(m)m!n)^{1-\frac{1}{r}}.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Tomando la potencia $1/m$ y usando la fórmula de Stirling (2.16) se sigue que

$$\sum_{j=1}^{n}|z_j^*| \leqslant C_{z^*,r}\left[\log(m)^{\frac{1}{m}}(2\pi m)^{\frac{1}{2m}}e^{\frac{1}{12m^2}}\frac{m}{e}n^{\frac{1}{m}}\right]^{1-\frac{1}{r}}. \tag{6.3}$$

Finalmente, eligiendo $m = \lfloor\log(n+1)\rfloor$ podemos concluir que el término $\frac{1}{\log(n+1)^{1-\frac{1}{r}}}\sum_{k=1}^{n}|z_n^*|$ (para todo $n \geqslant 2$) está acotado independientemente de n, con lo cual $z \in m_{\Psi_r}$. $\square$

6.2.2. La inclusión inferior $m_{\Psi_r} \subset monH_b(\ell_r)$

Nos enfrentamos ahora a la demostración de la inclusión inferior en el Teorema 6.2.1. La herramienta principal es la siguiente *desigualdad hipercontractiva*, cuya demostración requiere algo de trabajo, que realizaremos a lo largo de esta sección.

Teorema 6.2.3. *Fijemos $1 < r \leqslant 2$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $C_r = C_r(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $m, n \in \mathbb{N}$, todo polinomio m-homogéneo en n variables complejas P y todo $z \in \mathbb{C}^n$, tenemos*

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}|c_{\mathbf{j}}(P)z_{\mathbf{j}}^*| \leqslant C_r(\varepsilon)m^{2+\frac{1}{r}}((1+\varepsilon)2e)^{\frac{m}{r}}\|id : m_{\Psi_r}\to\ell_r\|^m\|z\|_{m_{\Psi_r}}^m\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}.$$

Antes de comenzar con la prueba del resultado, veamos cómo, teniéndolo a mano, podemos demostrar la inclusión inferior a la que apuntamos.

Demostración de la inclusión inferior en el Teorema 6.2.1. Elijamos $z \in m_{\Psi_r}$ y veamos que efectivamente $z \in monH_b(\ell_r)$. Por el Corolario 3.3.6 podemos asumir sin pérdida de generalidad que $z = z^*$. Dada $f \in H_b(\ell_r)$ consideremos $P_m(f)$, la parte m-homogénea en su expansión de Taylor ($P_m(f) = \frac{d^mf}{m!}(0)$ en el Teorema 1.3.1). El Teorema 6.2.3 (con $\varepsilon = 1$) da

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}|c_\alpha(f)z^\alpha| &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}|c_{\mathbf{j}}(f)z_{\mathbf{j}}| \\ &\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m=0}^{\infty}C_rm^{2+\frac{1}{r}}(4e)^{\frac{m}{r}}\|id\|^m\|z\|_{m_{\Psi_r}}^m\sup_{u\in B_{\ell_r^n}}\left|\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}c_{\mathbf{j}}(f)u_{\mathbf{j}}\right| \\ &= C_r\sum_{m=0}^{\infty}(m^{(2+\frac{1}{r})\frac{1}{m}}(4e)^{\frac{1}{r}}\|id\|\|z\|_{m_{\Psi_r}})^m\|P_m(f)\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r)}.\end{aligned}$$

Veamos que esta suma es finita. Tomemos $R > \sup_m \left(m^{(2+\frac{1}{r})\frac{1}{m}} (4e)^{\frac{1}{r}} \|id\| \|z\|_{m_{\Psi_r}} \right)$, por la homogeneidad de $P_m(f)$ vale

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty} (m^{(2+\frac{1}{r})\frac{1}{m}} (4e)^{\frac{1}{r}} \|id\| \|z\|_{m_{\Psi_r}})^m \|P_m(f)\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r)} \\
&\qquad = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{m^{(2+\frac{1}{r})\frac{1}{m}} (4e)^{\frac{1}{r}} \|id\| \|z\|_{m_{\Psi_r}}}{R} \right)^m \sup_{w \in R \cdot B_{\ell_r}} |P_m(f)(w)| \\
&\qquad\qquad \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{m^{(2+\frac{1}{r})\frac{1}{m}} (4e)^{\frac{1}{r}} \|id\| \|z\|_{m_{\Psi_r}}}{R} \right)^m \sup_{w \in R \cdot B_{\ell_r}} |f(w)| < \infty,
\end{aligned}$$

donde la última se debe a la desigualdad de Cauchy (1.10). Esto completa la prueba. $\square$

Comenzamos ahora el camino hacia la demostración del Teorema 6.2.3. Contamos con una observación simple.

Observación 6.2.4. Si $z \in m_{\Psi_r}$, entonces

$$n|z_n^*| \leqslant \sum_{l=1}^{n} z_l^* \leqslant \|z\|_{m_{\Psi_r}} \log(n+1)^{\frac{1}{r'}}.$$

Esto es

$$|z_n^*| \leqslant \|z\|_{m_{\Psi_r}} \frac{\log(n+1)^{\frac{1}{r'}}}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Así tenemos

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j|^r \leqslant \sum_{j=1}^{n} |z_j^*|^r \leqslant \|z\|_{m_{\Psi_r}}^r \sum_{j=1}^{n} \frac{\log(j+1)^{\frac{r}{r'}}}{j^r},$$

lo que implica $\|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\log(j+1)^{\frac{r}{r'}}}{j^r} \right)^{1/r}$ (notemos que esta serie converge para $1 < r$).

La desigualdad de Bayart-Defant-Schlüters en el Teorema 2.1.7 será fundamental aquí como lo fue en la demostración del Teorema 3.4.1 y el Teorema 5.2.1 en el caso $1 < q < p \leqslant 2$.

Lema 6.2.5. *Dado $1 < r \leqslant 2$, existe $A_r > 0$ tal que para todo $m, n \in \mathbb{N}$, todo polinomio m-homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y todo $z \in \mathbb{C}^n$ decreciente tenemos*

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}| \leqslant A_r m^{1+\frac{1}{r}} e^{\frac{m}{r}} \|z\|_{m_{\Psi_r}}^2 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\log(k+1)^{\frac{2}{r'}}}{k^{1+\frac{1}{r'}}} \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{J}(m-2,k)} |z_{\mathbf{i}}| |\mathbf{i}|^{\frac{1}{r}} \right) \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}.$$

Demostración. Consideremos $P = \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}} \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y $z \in \mathbb{C}^n$ decreciente. Usando primero la desigualdad de Hölder y luego (2.8) tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}| &= \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-1,n)} \sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} |c_{(\mathbf{j},j_m)}(P) z_{\mathbf{j}} z_{j_m}| \\
&\leqslant \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-1,n)} |z_{\mathbf{j}}| \Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} |c_{(\mathbf{j},j_m)}(P)|^{r'} \Big)^{\frac{1}{r'}} \Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} |z_{j_m}|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \\
&\leqslant e^{1-\frac{1}{r}} m e^{\frac{m}{r}} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r)} \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-1,n)} |z_{\mathbf{j}}| |\mathbf{j}|^{\frac{1}{r}} \Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} |z_{j_m}|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \\
&= e^{1-\frac{1}{r}} m e^{\frac{m}{r}} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r)} \sum_{j_{m-1}=1}^{n} |z_{j_{m-1}}| \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}(m-2,j_{m-1})} |z_{\mathbf{i}}| |(\mathbf{i}, j_{m-1})|^{\frac{1}{r}} \Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} |z_{j_m}|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \\
&\leqslant e^{1-\frac{1}{r}} m e^{\frac{m}{r}} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r)} (m-1)^{\frac{1}{r}} \sum_{j_{m-1}=1}^{n} |z_{j_{m-1}}| \Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} |z_{j_m}|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}(m-2,j_{m-1})} |z_{\mathbf{i}}| |\mathbf{i}|^{\frac{1}{r}},
\end{aligned} \tag{6.4}$$

donde la última desigualdad se debe a que $|(\mathbf{i}, j_{m-1})| \leqslant (m-1)|\mathbf{i}|$ para todo $\mathbf{i} \in \mathcal{J}(m-2, j_{m-1})$.

Acotamos ahora el factor $|z_{j_{m-1}}| \Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} |z_{j_m}|^r \Big)^{\frac{1}{r}}$. Para cada $1 \leqslant j \leqslant n$ usamos la Observación 6.2.4 para obtener

$$\begin{aligned}
|z_j| \Big(\sum_{k=j}^{n} |z_k|^r \Big)^{\frac{1}{r}} &\leqslant \|z\|^2_{m_{\Psi_r}} \frac{\log(j+1)^{\frac{1}{r'}}}{j} \Big(\sum_{k=j}^{n} \frac{\log(k+1)^{\frac{r}{r'}}}{k^r} \Big)^{\frac{1}{r}} \\
&\leqslant \|z\|^2_{m_{\Psi_r}} \frac{\log(j+1)^{\frac{1}{r'}}}{j} \log(j+1)^{\frac{1}{r'}-\frac{1}{r}} \Big(\sum_{k=j}^{n} \frac{\log(k+1)}{k^r} \Big)^{\frac{1}{r}},
\end{aligned}$$

y notemos que $\frac{r}{r'} - 1 = r - 2 \leqslant 0$.

Tratemos con la última suma

$$\begin{aligned}
\sum_{k=j}^{n} \frac{\log(k+1)}{k^r} &\leqslant \Big(1 + \frac{1}{j}\Big)^r \sum_{k=j}^{n} \frac{\log(k+1)}{(k+1)^r} \leqslant 2^r \sum_{k=j+1}^{n+1} \frac{\log(k)}{k^r} \leqslant 2^{r+2} \int_j^{n+1} \frac{\log(x)}{x^r} dx \\
&\leqslant 2^{r+2} \frac{(r-1)\log(j) + 1}{(r-1)^2 j^{r-1}} \leqslant 2^{r+2} \frac{2r}{(r-1)^2} \frac{\log(j+1)}{j^{r-1}}.
\end{aligned}$$

Gracias a las dos últimas cotas obtenidas conseguimos

$$|z_j| \Big(\sum_{k=j}^{n} |z_k|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \leqslant 2^{r+2} \frac{2r}{(r-1)^2} \|z\|^2_{m_{\Psi_r}} \frac{\log(j+1)^{\frac{2}{r'}}}{j^{1+\frac{1}{r'}}}$$

Esta desigualdad junto con (6.4) da la conclusión buscada. $\square$

En vistas del Lema 6.2.5, ahora será necesario acotar $\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{J}(m-2,k)} |z_{\mathbf{i}}||\mathbf{i}|^{\frac{1}{r}}$ de manera adecuada (dependiendo de k). Con este propósito cambiaremos a la notación de multiindices $\alpha \in \Lambda(m,b)$ por conveniencia, luego esta suma se lee

$$\sum_{\alpha\in\Lambda(m-2,k)} |z|^{\alpha}|[\alpha]|^{1/r}. \tag{6.5}$$

La estrategia será analizar piezas más pequeñas de la suma: las partes *tetraedral* y *par* introducidas en la Sección 6.1, y usar las cotas obtenidas para cada una de estas partes para concluir algo acerca de las sumas que implican a los monomios generales.

Lema 6.2.6. *Fijados $1 < r \leqslant 2$ y $M, N \in \mathbb{N}$, para todo $z \in \mathbb{C}^N$ decreciente tenemos*

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_T(M,N)} |z^{\alpha}||[\alpha]|^{\frac{1}{r}} \leqslant 2(1+\varepsilon)^{\frac{M}{r'}} \|z\|^M_{m_{\Psi_r}} N^{\frac{1}{(1+\varepsilon)r'}},$$

para todo $\varepsilon > 0$ y

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_E(M,N)} |z^{\alpha}||[\alpha]|^{\frac{1}{r}} \leqslant \|z\|^M_{\ell_r} \leqslant \|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\|^M \|z\|^M_{m_{\Psi_r}}.$$

Demostración. Comencemos por la primera desigualdad, observando que es obvia si $N = 1$. Podemos, entonces, asumir $N \geqslant 2$. Luego, dado $\alpha \in \Lambda_T(M,N)$, notemos que $\alpha! = 1$ y $|[\alpha]|$ es exactamente $M!$. Así, se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\Lambda_T(M,N)} |z^{\alpha}||[\alpha]|^{\frac{1}{r}} &= \sum_{\alpha\in\Lambda_T(M,N)} |z^{\alpha}||[\alpha]| \frac{1}{|[\alpha]|^{\frac{1}{r'}}} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^N |z_k|\Big)^M \frac{1}{M!^{\frac{1}{r'}}} \\ &\leqslant \|z\|^M_{m_{\Psi_r}} \log(N+1)^{\frac{M}{r'}} \frac{1}{M!^{\frac{1}{r'}}} \leqslant 2\|z\|^M_{m_{\Psi_r}} \Big(\frac{\log(N)^M}{M!}\Big)^{\frac{1}{r'}}.\end{aligned}$$

Un simple argumento de cálculo muestra que la función $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\log(x)^M}{x^{1/(1+\varepsilon)}}$ está acotada por $\big(\frac{(1+\varepsilon)M}{e}\big)^M$, luego $\log(N)^M \leqslant N^{1/(1+\varepsilon)}\big(\frac{(1+\varepsilon)M}{e}\big)^M$. Por otro lado, $M! \geqslant \big(\frac{M}{e}\big)^M$. Esto da la conclusión.

Para la prueba de la segunda desigualdad recordemos primero que para cada $\alpha \in \Lambda_E(M,N)$ hay un único $\beta \in \Lambda(M/2,N)$ tal que $\alpha = 2\beta$ y, más aún,

$$|[\alpha]| = \frac{M!}{\alpha_1!\cdots\alpha_N!} = \Big(\frac{(M/2)!}{\beta_1!\cdots\beta_N!}\Big)^2 \frac{M!}{(M/2)!(M/2)!} \prod_{i=1}^N \frac{\beta_i!\beta_i!}{(2\beta_i)!} \leqslant |[\beta]|^2,$$

donde la última desigualdad vale gracias a que $2^k \leqslant \frac{(2k)!}{k!^2} \leqslant 2^{2k}$ y luego

$$\frac{M!}{(M/2)!(M/2)!} \prod_{i=1}^N \frac{\beta_i!\beta_i!}{(2\beta_i)!} \leqslant 2^M \prod_{i=1}^N \frac{1}{2^{\beta_i}} = 1.$$

Notemos que, como $2/r \geqslant 1$, la norma en ℓ_1 acota a la norma en $\ell_{2/r}$), por ende se sigue que

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_E(M,N)} |z^\alpha||\alpha|^{\frac{1}{r}} \leqslant \sum_{\beta\in\Lambda(M/2,N)} |(z^2)^\beta||\beta|^{2/r} = \sum_{\beta\in\Lambda(M/2,N)} \Big(|(z^r)^\beta||\beta|\Big)^{2/r}$$
$$\leqslant \Big(\sum_{\beta\in\Lambda(M/2,N)} |(z^r)^\beta||\beta|\Big)^{2/r} = \Big(\sum_{l=1}^N |z_l|^r\Big)^{M/r} \leqslant \|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\|^M \|z\|^M_{m_{\Psi_r}}. \quad \square$$

Lema 6.2.7. *Dado $1 < r \leqslant 2$ existe una constante $K_r \geqslant 1$ tal que para todo $M, N \in \mathbb{N}$, y todo $z \in \mathbb{C}^N$ decreciente vale*

$$\sum_{\alpha\in\Lambda(M,N)} |z^\alpha||[\alpha]|^{\frac{1}{r}} \leqslant K_r(M+1)(1+\varepsilon)^{\frac{M}{r'}} 2^{\frac{M}{r}+1} N^{\frac{1}{(1+\varepsilon)r'}} (\|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\| \|z\|_{m_{\Psi_r}})^M,$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Demostración. Elijamos z decreciente y usemos la Observación 6.1.1 y el Lema 6.2.6 para obtener

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\Lambda(M,N)} |z^\alpha||[\alpha]|^{\frac{1}{r}} &= \sum_{k=0}^M \sum_{\alpha_T\in\Lambda_T(k,N)} \sum_{\alpha_E\in\Lambda_E(M-k,N)} |z^{(\alpha_T+\alpha_E)}||[\alpha_T+\alpha_E]|^{\frac{1}{r}} \\
&\leqslant 2^{\frac{M}{r}} \sum_{k=0}^M \left(\sum_{\alpha_T\in\Lambda_T(k,N)} |z_T^\alpha||[\alpha_T]|^{\frac{1}{r}}\right)\left(\sum_{\alpha_E\in\Lambda_E(M-k,N)} |z_E^\alpha||[\alpha_E]|^{\frac{1}{r}}\right) \\
&\leqslant 2^{\frac{M}{r}} \sum_{k=0}^M \left((1+\varepsilon)^{\frac{k}{r'}} \|z\|^k_{m_{\Psi_r}} N^{\frac{1}{(1+\varepsilon)r'}}\right)\left(\|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\|^{M-k} \|z\|^{M-k}_{m_{\Psi_r}}\right) \\
&\leqslant 2^{\frac{M}{r}+1}(1+\varepsilon)^M \|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\|^M \|z\|^M_{m_{\Psi_r}} N^{\frac{1}{(1+\varepsilon)r'}} \sum_{k=0}^M 2^{k(1-\frac{2}{r})}.
\end{aligned}$$

Para $r = 2$ la última suma es exactamente $M + 1$. Si $1 < r < 2$ la suma está acotada por $\frac{2^{2/r}}{2^{2/r}-2}$. Esto completa la demostración. $\square$

Estamos finalmente en condiciones de dar una prueba para el Teorema 6.2.3 del cual (como ya hemos visto) se sigue la inclusión inferior del Teorema 6.2.1.

Demostración del Teorema 6.2.3. Fijemos $1 < r \leqslant 2$ y n, m. Sean $P \in P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y $z \in \mathbb{C}^n$. Como $\|z\|_{m_{\Psi_r}} = \|z^*\|_{m_{\Psi_r}}$, podemos asumir $z = z^*$. Aplicando el Lema 6.2.7 con

$M = m - 2$ y $N = k$ y gracias al Lema 6.2.5 se sigue que

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}| \leqslant 2A_r m^{1+\frac{1}{r}} e^{\frac{m}{r}} \|z\|^2_{m_{\Psi_r}}$$
$$\times \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\log(k+1)^{\frac{2}{r'}}}{k^{1+\frac{1}{r'}}} K_r (m-1) k^{\frac{1}{(1+\varepsilon)r'}} \left((2(1+\varepsilon))^{1/r'} \|id\| \|z\|_{m_{\Psi_r}}\right)^{m-2} \right) \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}$$
$$\leqslant 2A_r K_r m^{2+\frac{1}{r}} ((1+\varepsilon)2e)^{\frac{m}{r}} \|id\|^m \|z\|^m_{m_{\Psi_r}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\log(k+1)^{\frac{2}{r'}}}{k^{1+\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)r'}}} \right) \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}.$$

Usando que $r > 1$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k+1)^{\frac{2}{r'}}}{k^{1+\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)r'}}}$ es convergente. Esto completa la demostración.

□

6.3. El caso $2 < r \leqslant \infty$.

Ahora nos concentramos en el caso $2 < r \leqslant \infty$. Estudiaremos el caso más general de $monH_b(\ell_{r,s})$ con $2 < r, s \leqslant \infty$. Lograremos caracterizar el conjunto de convergencia monomial en el caso de $s = \infty$ para todo $2 < r \leqslant \infty$ y dar cotas superiores e inferiores bastante ajustadas para estos conjuntos en los casos restantes.

Para lograrlo será útil definir una familia de espacios de Banach que generaliza a los *espacios de Marcinkiewicz*. Sea $\Psi = (\Psi(n))_{n=0}^{\infty}$ un símbolo, i.e., una sucesión creciente de números reales no negativos con $\Psi(0) = 0$ y $\Psi(n) > 0$ para $n \in \mathbb{N}$. Para $1 \leqslant r, s \leqslant \infty$ definimos $X_{r,s}(\Psi)$ cómo

$$X_{r,s}(\Psi) := \left\{ z \in \ell_\infty : \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{\Psi(n)} \|(z_k^*)_{k=1}^n\|_{\ell_{r,s}^n} < \infty \right\},$$

dotado de la norma

$$\|z\|_{X_{r,s}(\Psi)} := \sup_{n \geqslant 1} \frac{\|(z_k^*)_{k=1}^n\|_{\ell_{r,s}^n}}{\Psi(n)}.$$

Cuando $r = s$ simplemente escribiremos $X_r(\Psi)$ para $X_{r,s}(\Psi)$.

Observación 6.3.1. Para el símbolo Ψ, los números reales $1 \leqslant r, s \leqslant \infty$ y $z \in X_{r,s}(\Psi)$, usando que $n^{\frac{1}{r}} \sim \left(\sum_{k=1}^n k^{\frac{s}{r}-1}\right)^{1/s}$ tenemos la siguiente cadena de desigualdades

$$|z_n^*| n^{\frac{1}{r}} \leqslant C_1 |z_n^*| \left(\sum_{k=1}^n k^{\frac{s}{r}-1} \right)^{1/s} \leqslant C_1 \|(z_k^*)_{k=1}^n\|_{\ell_{r,s}^n} \ll \|z\|_{X_{r,s}(\Psi)} \Psi(n),$$

luego $|z_n^*| \ll \|z\|_{X_{r,s}(\Psi)} \frac{\Psi(n)}{n^{1/r}}$.

Será útil considerar la aplicación $\varphi : [2, \infty] \to [1, 2]$ tal que $\varphi(r) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{r}\right)^{-1}$ cuando $r \in [2, \infty)$ y $\varphi(\infty) = 2$. Observemos que, fijado $2 \leqslant r \leqslant \infty$, el exponente conjugado de $\varphi(r)$ es $\varphi(r)' = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right)^{-1}$ $(1 = \frac{1}{\varphi(r)} + \frac{1}{\varphi(r)'})$.

Teorema 6.3.2. *Dados $2 < r \leqslant \infty$ y $2 < s \leqslant \infty$, para todo $\frac{1}{s} < \delta < \frac{1}{2}$ se tiene*

$$X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta) \subset monH_b(\ell_{r,s}) \subset X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Psi_2),$$

donde $\Psi_2 = (\sqrt{\log(n+1)})_{n=0}^\infty$ (como lo definimos en (6.1)) y Φ^δ definido para $n \in \mathbb{N}_0$ como

$$\Phi^\delta(n) = \begin{cases} \Psi_2(n) & \text{para } s = \infty \\ \log(n+1)^{\frac{1}{2}-\delta} & \text{para } s < \infty. \end{cases}$$

La cota superior vale para todo $2 \leqslant r, s \leqslant \infty$ (incluyendo $s = 2$).

La demostración del Teorema 6.3.2 requiere un poco de trabajo, en particular la dividiremos en la cota superior y la inferior. Probaremos la cota superior a lo largo de la Sección 6.3.1 y la cota inferior en la Sección 6.3.2. Primero discutamos algunos corolarios y consecuencias de este teorema.

Para $2 < s < \infty$ y $1/s < \delta < 1/2$ el símbolo Φ^δ es cercano a Ψ_2. Más precisamente, dado $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\Phi^\delta(n) = \Psi_2(n)\ \log(n+1)^{-\delta}.$$

Además para $s = \infty$ tenemos que $\Phi^\delta = \Psi_2$ sin depender de δ, esto muestra que, asumiendo la validez del Teorema 6.3.2, el próximo corolario se sigue.

Corolario 6.3.3. *Dado $2 \leqslant r \leqslant \infty$ vale que*

$$monH_b(\ell_{r,\infty}) = X_{\varphi(r),2}(\Psi_2) = \left\{ z \in \ell_\infty : \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{\log(n+1)}} \left(\sum_{k=1}^n k^{\frac{2}{r}} |z_k^*|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

En particular el Corolario 6.3.3 implica

$$monH_b(\ell_\infty) = X_2(\Psi_2) = \left\{ z \in \ell_\infty : \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{\log(n+1)}} \left(\sum_{k=1}^n |z_k^*|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Este resulta se ve muy similar al Teorema 3.2.3. Más aún, podemos considerar la norma para $z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dada por

$$\|z\|_Z := \text{máx} \left\{ \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{\log(n)}} \left(\sum_{k=1}^n (z_k^*)^2 \right)^{1/2}, \|z\|_{\ell_\infty} \right\}.$$

Es sencillo ver que

$$monH_b(\ell_\infty) = X_2(\Psi_2) = \{ z \in \ell_\infty : \|z\|_Z < \infty \},$$

como conjuntos. Por el Teorema 3.2.3 se sigue que

$$B_Z \subset monH_\infty(B_{\ell_\infty}) \subset \overline{B_Z}. \tag{6.6}$$

De algún modo, con la norma correcta, podemos escribir

$$B_{monH_b(\ell_\infty)} \subset monH_\infty(B_{\ell_\infty}) \subset \overline{B_{monH_b(\ell_\infty)}}.$$

Observación 6.3.4. Para un símbolo fijo Ψ tenemos $X_1(\Psi) = m_\Psi$. En otras palabras, estas nuevas familias de espacios de sucesiones generaliza a los espacios de Marcinkiewicz. En particular vale que

$$m_{\Psi_2} = X_1(\Psi_2). \tag{6.7}$$

Estamos listos para comenzar la prueba de la inclusión superior en el Teorema 6.3.2.

6.3.1. La inclusion superior $\boldsymbol{monH_b(\ell_{r,s})} \subset \boldsymbol{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Psi_2)}$.

Aquí daremos la demostración para inclusión superior en el Teorema 6.3.2. Nuestros argumentos difieren de las técnicas clásicas. Por ejemplo, en la sección previa usamos los polinomios de Bayart dados en (2.20). En este caso seguimos una estrategia que recuerda más a la usada en [DF11, BDS19]. En esos artículos los autores encuentran cotas superiores acotadas para las constantes de incondicionalidad de $\mathcal{P}(^m\ell_p^n)$ con $2 \leqslant p < \infty$ al compararlas con la constante de incondicionalidad de $\mathcal{P}(^m\ell_\infty^n)$, la cual lograban calcular. Aquí imitaremos esa heurística para desarrollar una herramienta que nos permita conectar $monH_b(\ell_{p,s})$ con $monH_b(\ell_2)$ el cual ya conocemos gracias al Teorema 6.2.1.

Necesitaremos la siguiente conocida *desigualdad de reordenamiento de Hardy-Littlewood* (ver por ejemplo [HLP52, Section 10.2, Theorem 368]).

Lema 6.3.5 (Desigualdad de reordenamiento de Hardy-Littlewood)**.** *Sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones no crecientes de números reales no negativos. Luego, para todo $m \in \mathbb{N}$ y toda función inyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tenemos*

$$\sum_{k=1}^{m} a_{\sigma(k)} b_k \leqslant \sum_{k=1}^{m} a_k b_k.$$

El siguiente lema técnico es el primer paso en la dirección de probar la inclusión superior.

Lema 6.3.6. *Dados $2 \leqslant r, s \leqslant \infty$ y $\xi \in \ell_{\varphi(r)',\varphi(s)'}$ el operador lineal*

$$\begin{aligned} \ell_{r,s} &\xrightarrow{D_\xi} \ell_2 \\ (z_j)_{j\geqslant 1} &\longmapsto (z_j\xi_j)_{j\geqslant 1}, \end{aligned}$$

está bien definido y acotado. Más aún, $\|D_\xi\| \leqslant \|\xi\|_{\ell_{\varphi(r)',\varphi(s)'}}$.

Demostración. Tomemos $\xi \in \ell_{\varphi(r)',\varphi(s)'}$ y $z \in \ell_{r,s}$, entonces

$$\begin{aligned} \|D_\xi(z)\|_{\ell_2} &= \left(\sum_{k\geqslant 1} |\xi_k z_k|^2\right)^{1/2} \\ \text{(por el Lema 6.3.5)} \quad &\leqslant \left(\sum_{k\geqslant 1} |\xi_k^* z_k^*|^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k\geqslant 1} |\xi_k^* z_k^*|^2 k^t k^{-t}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

donde $t = 2(1/r - 1/s)$. Ahora, por la desigualdad de Hölder (como $s \geqslant 2$), tenemos que

$$\left(\sum_{k\geqslant 1} |\xi_k^* z_k^*|^2 k^t k^{-t}\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k\geqslant 1} |z_k^*|^s k^{\frac{ts}{2}}\right)^{1/s} \left(\sum_{k\geqslant 1} |\xi_k^*|^{\frac{2s}{s-2}} k^{\frac{-ts}{s-2}}\right)^{\frac{s-2}{2s}}.$$

Usando que $\frac{ts}{2} = \frac{s}{r} - 1$ y $\frac{-ts}{s-2} = \frac{\varphi(s)'}{\varphi(r)'} - 1$ se sigue que el último término en la anterior cadena de desigualdades es $\|z\|_{\ell_{r,s}} \|\xi\|_{\ell_{\varphi(r)',\varphi(s)'}}$, entonces

$$\|D_\xi(z)\|_{\ell_2} \leqslant \|z\|_{\ell_{r,s}} \|\xi\|_{\ell_{\varphi(r)',\varphi(s)'}}. \tag{6.8}$$

Cuando $2 \leqslant r < s \leqslant \infty$ necesitamos considerar la norma en $\ell_{r,s}$ dada por $\|\cdot\|_{\ell_{(r,s)}}$, usando (1.2) tenemos que $\|z\|_{\ell_{r,s}} \leqslant \|z\|_{\ell_{(r,s)}}$. Luego por la cota en (6.8), para todo $2 \leqslant r, s \leqslant \infty$ tenemos $\|D_\xi\| \leqslant \|\xi\|_{\ell_{\varphi(r)',\varphi(s)'}}$. □

Ahora podemos probar la inclusión superior en el teorema 6.3.2.

Demostración de la inclusión superior en el Teorema 6.3.2. Para el caso $r = s = 2$, el Teorema 6.2.1 y la Observación 6.3.4 con símbolo Ψ_2 permiten concluir lo que queremos.

En otros casos, tomemos $z \in monH_b(\ell_{r,s})$, veremos que para todo $\xi \in \ell_{\varphi(r)',\varphi(s)'}$ vale que $D_\xi z \in monH_b(\ell_2) \subset X_1(\Psi_2)$. Dada una función $f \in H_b(\ell_2)$ definimos $g_\xi = f \circ D_\xi \in H_b(\ell_{r,s})$, gracias a la Observación 3.1.5 tenemos que $c_\alpha(g_\xi) = \xi^\alpha c_\alpha(f)$. Luego para toda $f \in H_b(\ell_2)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{m\geqslant 0} \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} |c_\alpha(f)(D_\xi z)^\alpha| &= \sum_{m\geqslant 0} \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} |c_\alpha(f)\xi^\alpha z^\alpha| \\ &= \sum_{m\geqslant 0} \sum_{\alpha\in\Lambda(m,n)} |c_\alpha(g) z^\alpha| < \infty,\end{aligned}$$

con lo cual $D_\xi z \in monH_b(\ell_2)$.

Esto induce un operador lineal, dado por

$$T_z : \ell_{\varphi(r)',\varphi(s)'} \to X_1(\Psi_2) \tag{6.9}$$
$$\xi \mapsto \xi z, \tag{6.10}$$

que resulta ser acotado por gracias al Teorema del gráfico cerrado. Veamos que eso es cierto. Sea $(\xi^N)_{N\geqslant 1} \subset \ell_{\varphi(p)',\varphi(q)'}$ una sucesión tal que

$$\|\xi^N - \xi\|_{\ell_{\varphi(r)',\varphi(s)'}} \to 0 \tag{6.11}$$
$$\|T_z(\xi^N) - w\|_{X_1(\Psi_2)} \to 0, \tag{6.12}$$

cuando $N \to \infty$. Necesitamos mostrar que $w = T_z(\xi) = \xi \cdot z$. Por la ecuación (6.11) tenemos

$$\sum_{k\geqslant 1} k^{(\frac{1}{s}-\frac{1}{r})\varphi(s)'} |(\xi^N - \xi)_k^*|^{\varphi(s)'} \leqslant A_N,$$

donde $A_N \to 0$, luego para $k \in \mathbb{N}$ fijo se sigue que

$$k^{(\frac{1}{s}-\frac{1}{r})\varphi(s)'}|(\xi^N - \xi)_k^*|^{\varphi(s)'} \leqslant A_N.$$

Como $|\xi_k^N - \xi_k| \leqslant |(\xi^N - \xi)_k^*| \to 0$ entonces para k fijo vale que $\xi_k^N \to \xi_k$ cuando $N \to \infty$. Análogamente, la ecuación (6.12) implica $\sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{\log(n+1)}} \sum_{k=1}^{n} |(\xi^N \cdot z - w)_k^*| \leqslant B_N$ con $B_N \to 0$. Ahora, para $k \in \mathbb{N}$ fijo, tomando $n \geqslant k$ tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} |(\xi^N \cdot z - w)_k^*| \leqslant B_N \sqrt{\log(n+1)},$$

y, como antes, $\xi_k^N z_k \to w_k$. Finalmente $w_k = \xi_k z_k$, so $w = T_z(\xi)$ como queríamos.

Siendo T_z acotado, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|T_z\| &= \sup_{\xi \in B_{\ell_{\varphi(r)',\varphi(s)'}}} \|\xi z\|_{X_1(\Psi_2)} \\
&= \sup_{\xi \in B_{\ell_{\varphi(r)',\varphi(s)'}}} \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{\log(n+1)}} \sum_{k=1}^{n} |(\xi_k z_k)^*| \\
&= \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{\log(n+1)}} \sup_{\xi \in B_{\ell_{\varphi(r)',\varphi(s)'}}} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k z_k^* \right| \\
&\sim \sup_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{\log(n+1)}} \|(z_k^*)_{k=1}^n\|_{\ell_{\varphi(r),\varphi(s)}} \\
&= \|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Psi_2)},
\end{aligned}$$

ya que, usando que $1 < \varphi(r)$, por el Teorema 1.1.4, los espacios $(\ell^n_{\varphi(r),\varphi(r)})'$ y $\ell^n_{\varphi(r)',\varphi(s)'}$ son isomorfos para todo $n \in \mathbb{N}$ (y la norma del isomorfismo no depende de n). Luego, como $\|T_z\| \sim \|z\|_{X_{\varphi(p),\varphi(q)}(\Psi_2)}$ es un número finito, vale que $z \in X_{\varphi(p),\varphi(q)}(\Psi_2)$. $\square$

6.3.2. La inclusión inferior $X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta) \subset monH_b(\ell_{r,s})$.

Nos enfrentamos ahora a la prueba de la inclusión inferior en el Teorema 6.3.2. Le herramienta principal será el siguiente resultado, cuya demostración realizaremos a lo largo de esta sección.

Teorema 6.3.7. *Dados $2 < r \leqslant \infty$ y $2 < s \leqslant \infty$, sea $1/s < \delta < 1/2$ y consideremos Φ^δ como en el Teorema 6.3.2. Para todo $\varepsilon > 0$ y $m, n \in \mathbb{N}$, todo $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y todo $z \in \mathbb{C}^n$, tenemos*

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}^*| \leqslant D(\varepsilon) e m^{3/2} (1+\varepsilon)^{(m-1)/2} A^{m-1} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell^n_{r,\infty})} \|z\|^m_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)},$$

donde $A = 2C^{-1}_{r,s,\delta} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{\log(l+1)}{l} \right)^2 \right)^{1/4}$ y $C_{r,s,\delta}, D(\varepsilon) > 0$ son constante que no dependen de m ni de n.

Antes de empezar con la demostración de este resultado, veamos que, usándolo, podemos mostrar que vale la inclusión inferior.

Demostración de la inclusión inferior en el Teorema 6.3.2. Sea $z \in X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)$ veamos que $z \in monH_b(\ell_{r,s})$. Por el Corolario 3.3.6 podemos asumir sin pérdida de generalidad que $z = z^*$. Dada $f \in H_b(\ell_{r,s})$ (recordemos que $P_m(f)$ es la parte m-homogénea de su expansión de Taylor), el Teorema 6.3.7 (con $\varepsilon = 1$) da

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(f)z^\alpha| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(f)z_{\mathbf{j}}| \\
&\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=0}^{\infty} D(\varepsilon)em^{3/2}(\sqrt{2}A)^{m-1}\|z\|^m_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)} \sup_{u\in B_{\ell_r^n}} \left| \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}}(f)u_{\mathbf{j}} \right| \\
&= D(\varepsilon)e \sum_{m=0}^{\infty} m^{3/2}(\sqrt{2}A)^{m-1}\|z\|^m_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)} \|P_m(f)\|_{\mathcal{P}(^m\ell_{r,\infty}^n)}.
\end{aligned}$$

Veamos que la última suma es finita. Consideremos

$$R > S := \sup_{m\geqslant 1} \left(m^{3/2}(\sqrt{2}A)^{m-1}\|z\|^m_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)} \right)^{1/m},$$

por la homogeneidad de $P_m(f)$ se sigue

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty} m^{3/2}(\sqrt{2}A)^{m-1}\|z\|^m_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)} \|P_m(f)\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r)} \\
&\qquad = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^{3/2}(\sqrt{2}A)^{m-1}\|z\|^m_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)}}{R^m} \sup_{w\in R\cdot B_{\ell_r}} |P_m(f)(w)| \\
&\qquad \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{S}{R}\right)^m \sup_{w\in R\cdot B_{\ell_r}} |f(w)| < \infty,
\end{aligned}$$

donde el último paso se debe a la desigualdad de Cauchy (1.10). Esto completa la prueba. □

En la sección previa usamos el Teorema 2.1.7 para lograr cotas inferiores, ahora lo reemplazaremos por el Teorema 2.1.9. Gracias a la Observación 3.1.5 lograremos usarlo para comparar una norma mixta de coeficientes para cualquier polinomio con su norma uniforme en $\ell_{r,s}$. Si tuviéramos una nueva desigualdad mixta de la forma del Teorema 2.1.7 y el Teorema 2.1.9 que se ajustara mejora a este problema, quizás podríamos cerrar la brecha entre las cotas superiores e inferiores en el Teorema 6.3.2.

Lema 6.3.8. *Dados $2 \leqslant r \leqslant \infty$ y $2 < s \leqslant \infty$, sea $1/s < \delta < 1/2$ y consideremos Φ^δ como en el Teorema 6.3.2. Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, todo $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y todo $z \in \mathbb{C}^n$ decreciente tenemos*

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}| \leqslant e m 2^{m-1} \|P\|_{\mathcal{P}(^m \ell_{r,\infty}^n)} \|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)} \sup_{k=1,\ldots,n} \frac{\Phi^\delta(k)}{k^{1/\varphi(r)} |w_k|} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,k)} \left| \frac{z_{\mathbf{j}}}{w_{\mathbf{j}}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde $w \in B_{\ell_{r,s}^n}$.

Demostración. Consideremos un polinomio m-homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y $z \in \mathbb{C}^n$ decreciente. Usando la desigualdad de Hölder, el Teorema 2.1.9 y la Observación 3.1.5 con $\mathcal{R} = B_{\ell_{r,\infty}^n}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}| &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,k)} \left| c_{(\mathbf{j},k)}(P) w_{\mathbf{j}} w_k \frac{z_{\mathbf{j}}}{w_{\mathbf{j}}} \frac{z_k}{w_k} \right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{z_k}{w_k} \right| \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,k)} |c_{(\mathbf{j},k)}(P_w)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,k)} \left| \frac{z_{\mathbf{j}}}{w_{\mathbf{j}}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,k)} |c_{(\mathbf{j},k)}(P_w)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{k=1,\ldots,n} \left| \frac{z_k}{w_k} \right| \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,k)} \left| \frac{z_{\mathbf{j}}}{w_{\mathbf{j}}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, gracias a la Observación 6.3.1 tenemos

$$\left| \frac{z_k}{w_k} \right| \leqslant \|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)} \frac{\Phi^\delta(k)}{k^{1/\varphi(r)} \cdot w_k},$$

y usando esta cota en la anterior cadena de desigualdades tenemos lo que queríamos probar. □

Lema 6.3.8 vale para todo $w \in B_{\ell_{r,s}^n}$. Será conveniente elegir w dependiendo de r, s y $1/s < \delta < 1/2$ del siguiente modo

$$w = w_\delta = \begin{cases} \left(\frac{1}{k^{1/r}} \right)_{k=1}^{N} & \text{si } s = \infty \\ C_{r,s,\delta} \left(\frac{1}{k^{1/r} \log(k+1)^\delta} \right)_{k=1}^{N} & \text{si } s < \infty, \end{cases} \tag{6.13}$$

donde $C_{r,s,\delta} > 0$ es tal que $\|w\|_{\ell_{r,s}^n} \leqslant 1$. Podemos pensar que $C_{r,s,\delta} = 1$ cuando $s = \infty$.

Ahora serán necesarios los multi-índices *tetraedrales* y *pares* dados en la *descomposición de factorización* en la Seccón 6.1.

Lema 6.3.9. *Dados $2 \leqslant r \leqslant \infty$, $2 < s \leqslant \infty$ y $1/s < \delta < 1/2$. Para cada par $M, N \in \mathbb{N}$, y todo $z \in \mathbb{C}^N$ decreciente tenemos*

$$\sum_{\alpha \in \Lambda_T(M,N)} \left| \frac{z^\alpha}{w^\alpha} \right|^2 \leqslant C_{r,s,\delta}^{-2M} (1+\varepsilon)^M \|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)}^{2M} (N+1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}},$$

para todo $\varepsilon > 0$ *y*

$$\sum_{\alpha \in \Lambda_E(M,N)} \left| \frac{z^\alpha}{w^\alpha} \right|^2 \leqslant C_{r,s,\delta}^{-2M} \|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)}^{2M} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\log(k)}{k} \right)^2 \right)^{M/2},$$

donde $w \in B_{\ell_{r,s}^N}$ *y* $C_{r,s,\delta}$ *como están definidos en* (6.13), .

Demostración. Comencemos por la primer desigualdad, observando que es obvia para $N = 1$. Podemos, entonces, asumir $N \geqslant 2$. Luego, dado $\alpha \in \Lambda_T(M,N)$, notemos que $\alpha! = 1$ y $|[\alpha]|$ es exactamente $M!$. Luego, para $s = \infty$ tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \Lambda_T(M,N)} \left| \frac{z^\alpha}{w^\alpha} \right|^2 &= \frac{1}{M!} \sum_{\alpha \in \Lambda_T(M,N)} \left| \frac{z^\alpha}{w^\alpha} \right|^2 M! \leqslant \frac{1}{M!} \left(\sum_{k=1}^{N} \left| \frac{z_k}{w_k} \right|^2 \right)^M \\ &= \frac{1}{M!} \left(\|z\|_{\ell_{\varphi(r),2}}^2 \right)^M \leqslant \frac{1}{M!} \|z\|_{X_{\varphi(r),2}(\Psi_2)}^{2M} \log(N+1)^M . \end{aligned} \tag{6.14}$$

Por otro lado, si $2 < s < \infty$ tomemos $1/s < \delta < 1/2$. Primero, por la Observación 6.3.1 tenemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_k}{w_k} \right|^2 &= C_{r,s,\delta}^{-2} |z_k|^{\varphi(s)} |z_k|^{2-\varphi(s)} k^{2/r} \log(k+1)^{2\delta} \\ &\leqslant C_{r,s,\delta}^{-2} |z_k|^{\varphi(s)} \|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)}^{2-\varphi(s)} \Phi^\delta(k)^{2-\varphi(s)} k^{\frac{\varphi(s)}{\varphi(r)}-1} \log(k+1)^{2\delta}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Luego, procediendo como antes, y usando la expresión en (6.15) se sigue

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \Lambda_T(M,N)} \left| \frac{z^\alpha}{w^\alpha} \right|^2 &\leqslant \frac{1}{M!} \left(\sum_{k=1}^{N} \left| \frac{z_k}{w_k} \right|^2 \right)^M \\ &\leqslant \frac{1}{M!} \left(C_{r,s,\delta}^{-2} \|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)}^{2-\varphi(s)} \Phi^\delta(N)^{2-\varphi(s)} \log(N+1)^{2\delta} \sum_{k=1}^{N} k^{\frac{\varphi(s)}{\varphi(r)}-1} |z_k|^{\varphi(s)} \right)^M \\ &= \frac{1}{M!} C_{r,s,\delta}^{-2M} \left(\|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)}^{2-\varphi(s)} \Phi^\delta(N)^{2-\varphi(s)} \log(N+1)^{2\delta} \|(z_k^*)_{k=1}^N\|_{\ell_{\varphi(r),\varphi(s)}}^{\varphi(s)} \right)^M \\ &= \frac{1}{M!} C_{r,s,\delta}^{-2M} \|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)}^{2M} \left(\Phi^\delta(N)^2 \log(N+1)^{2\delta} \right)^M . \end{aligned} \tag{6.16}$$

Como $\Phi^\delta(N)^2 \log(N+1)^{2\delta} = \log(N+1)$, y por la cadena de desigualdades en (6.16) tenemos

$$\sum_{\alpha \in \Lambda_T(M,N)} \left| \frac{z^\alpha}{w^\alpha} \right|^2 \leqslant \frac{C_{r,s,\delta}^{-2M}}{M!} \|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)}^{2M} \log(N+1)^M,$$

como para $s = \infty$.

Un simple argumento de cálculo muestra que la función $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\log(x)^M}{x^{1/(1+\varepsilon)}}$ está acotada por $\left(\frac{(1+\varepsilon)M}{e}\right)^M$, entonces $\log(N)^M \leqslant N^{1/(1+\varepsilon)}\left(\frac{(1+\varepsilon)M}{e}\right)^M$. Además $M! \geqslant \left(\frac{M}{e}\right)^M$. Esto nos da la conclusión.

Para probar la segunda desigualdad recordemos primero que para cada $\alpha \in \Lambda_E(M,N)$ existe un único $\beta \in \Lambda(M/2,N)$ tal que $\alpha = 2\beta$, luego

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\Lambda_E(M,N)}\left|\frac{z^\alpha}{w^\alpha}\right|^2 = \sum_{\beta\in\Lambda(M/2,N)}\left|\frac{z^{2\beta}}{w^{2\beta}}\right|^2 = \sum_{\beta\in\Lambda(M/2,N)}\left|\frac{z^{\beta}}{w^{\beta}}\right|^4 &\leqslant \left(\sum_{k=1}\left|\frac{z_k}{w_k}\right|^4\right)^{M/2}\\ &\leqslant C_{r,s,\delta}^{-2M}\|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)}^{2M}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\log(k+1)}{k}\right)^2\right)^{M/2},\end{aligned}$$

donde usamos la Observación 6.3.1 y que vale $\frac{\Phi^\delta(k)}{w_k} \leqslant C_{r,s,\delta}^{-1}\log(k+1)^{1/2}k^{1/r}$ para cada $2 < s \leqslant \infty$ y todo $k \in \mathbb{N}$. □

Lema 6.3.10. *Sean $2 \leqslant r \leqslant \infty$, $2 < s \leqslant \infty$ y $2 < \delta < s$. Para cada par $M,N \in \mathbb{N}$, y todo $z \in \mathbb{C}^N$ decreciente tenemos*

$$\sum_{\alpha\in\Lambda(M,N)}\left|\frac{z^\alpha}{w^\alpha}\right|^2 \leqslant (M+1)(1+\varepsilon)^M A^M \|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)}^{2M}(N+1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}},$$

para todo $\varepsilon > 0$ y $A = C_{r,s,\delta}^{-2}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{\log(l+1)}{l}\right)^2\right)^{1/2}$.

Demostración. Tomemos algún z decreciente y usemos el Lema 6.3.9 para conseguir

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\Lambda(M,N)}\left|\frac{z^\alpha}{w^\alpha}\right|^2 &\leqslant \sum_{k=0}^{M}\sum_{\alpha_T\in\Lambda_T(k,N)}\sum_{\alpha_E\in\Lambda_E(M-k,N)}\left|\frac{z^{(\alpha_T+\alpha_E)}}{w^{(\alpha_T+\alpha_E)}}\right|^2\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{M}\left(\sum_{\alpha_T\in\Lambda_T(k,N)}\left|\frac{z^{\alpha_T}}{w^{\alpha_T}}\right|^2\right)\left(\sum_{\alpha_E\in\Lambda_E(M-k,N)}\left|\frac{z^{\alpha_E}}{w^{\alpha_E}}\right|^2\right)\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{M}\left(C_{r,s,\delta}^{-2k}(1+\varepsilon)^k\|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)}^{2k}(N+1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right)\left(\|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)}^{2(M-k)}A^{M-k}\right)\\ &= \|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)}^{2M}(N+1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}A^M\sum_{k=0}^{M}(1+\varepsilon)^k\\ &\leqslant (M+1)(1+\varepsilon)^M A^M\|z\|_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)}^{2M}(N+1)^{\frac{1}{1+\varepsilon}}.\end{aligned}$$

□

Estamos finalmente en la posición de dar la demostración del Teorema 6.2.3 del cual (como ya vimos) se sigue la inclusión inferior en el Teorema 6.2.1.

Demostración del Teorema 6.3.7. Fijemos $2 \leqslant r \leqslant \infty$ y $2 < s \leqslant \infty$ y sean $1/s < \delta < 1/2$ y $\varepsilon > 0$. Dados $n, m \in \mathbb{N}$ tomemos un polinomio m-homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y $z \in \mathbb{C}^n$. Como $\|z\|_{m_{\Psi_r}} = \|z^*\|_{m_{\Psi_r}}$, podemos asumir que $z = z^*$. Usando el Lema 6.3.10 con $M = m-1$, $N = k$ y w como en (6.13) tenemos

$$\begin{aligned}
&\sup_{k=1,\dots,n} \frac{\Phi^\delta(k)}{k^{1/\varphi(r)} \cdot w_k} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,k)} \left| \frac{z_{\mathbf{j}}}{w_{\mathbf{j}}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leqslant \sup_{k=1,\dots,n} \frac{\log(k+1)^{\frac{1}{2}-\delta} \log(k+1)^{\delta} k^{1/r}}{k^{1/\varphi(r)}} \left(m(1+\varepsilon)^{m-1} A^{m-1} \|z\|^{2(m-1)}_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)} k^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \right)^{1/2} \\
&\quad \leqslant \sqrt{m(1+\varepsilon)^{m-1} A^{m-1}} \|z\|^{(m-1)}_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)} \sup_{k=1,\dots,n} \frac{\log(k+1)^{1/2} k^{\frac{1}{2(1+\varepsilon)}}}{k^{1/2}}.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Gracias a que la sucesión $\left(\frac{\log(k+1)^{1/2} k^{\frac{1}{2(1+\varepsilon)}}}{k^{1/2}} \right)_{k \geqslant 1}$ es eventualmente decreciente se sigue que

$$\sup_{k=1,\dots,n} \frac{\log(k+1)^{1/2} k^{\frac{1}{2(1+\varepsilon)}}}{k^{1/2}} = D(\varepsilon),$$

y reemplazando esto en (6.17) obtenemos

$$\sup_{k=1,\dots,n} \frac{\Phi^\delta(k)}{k^{1/\varphi(r)} \cdot w_k} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,k)} \left| \frac{z_{\mathbf{j}}}{w_{\mathbf{j}}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{m(1+\varepsilon)^{m-1} A^{m-1}} D(\varepsilon) \|z\|^{(m-1)}_{X_{\varphi(r),\varphi(s)}(\Phi^\delta)} \tag{6.18}$$

El Lema 6.3.8 sumado a la cota en (6.18) implican que

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}| &\leqslant e m 2^{m-1} \|P\|_{\mathcal{P}(^m \ell^n_{r,\infty})} \|z\|_{X_{\varphi(r),2}} \sup_{k=1,\dots,n} \left(\frac{\log(k)}{k} \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,k)} \left| \frac{z_{\mathbf{j}}}{w_{\mathbf{j}}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant e m^{3/2} 2^{m-1} C(\varepsilon) \sqrt{m(1+\varepsilon)^{m-1} A^{m-1}} \|P\|_{\mathcal{P}(^m \ell^n_{r,\infty})} \|z\|^m_{X_{\varphi(r),2}}.
\end{aligned}$$

donde A se define como en el Lema 6.3.10. $\square$

Es notable que, para aquellos espacios de sucesiones X en los que fuimos capaces de caracterizar el conjunto de convergencia monomial para la familia $H_b(X)$, resulta que $monH_b(X)$ es en sí mismo un espacio de sucesiones. Esto trae nuevas preguntas.

Pregunta 6.3.11. *¿Es el conjunto de convergencia monomial de $H_b(X)$ un espacio de sucesiones para cualquier espacio de sucesiones X dado?*

O la menos ambiciosa.

Pregunta 6.3.12. *¿Es siempre un espacio de Banach o por lo menos un espacio vectorial?*

Estas preguntas parecen muy interesantes y trazan un camino de investigación alrededor de la estructura de estos conjuntos.

Capítulo 7

Convergencia monomial para $H_\infty(B_{\ell_r})$

Usaremos los resultados del Capítulo 6 para arrojar nueva luz sobre los conjuntos de convergencia monomial de $H_\infty(B_{\ell_r})$. Anteriormente, nuestros métodos nos permitieron caracterizar el resultante espacio de sucesiones $monH_b(\ell_r)$ siempre que $1 < r \leqslant 2$. Aquí trasladamos esos resultados para dar nuevas descripciones de $monH_\infty(B_{\ell_r})$ cuando $1 < r \leqslant 2$.

7.1. Cambiando finitas coordenadas

Al lidiar con $monH_\infty(B_{\ell_\infty})$ es muy útil el hecho de que, si una sucesión pertenece al conjunto de convergencia monomial y modificamos finitas de sus coordenadas, la sucesión resultante permanece dentro del conjunto de convergencia monomial.

Lema 7.1.1. *[DGMPG08, Lemma 2] Si $z \in H_\infty(B_{\ell_\infty})$ y $u \in B_{\ell_\infty}$ satisface que $|u_n| \leqslant |z_n|$ para todos menos finitos $n \in \mathbb{N}$, entonces $u \in monH_\infty(B_{\ell_\infty})$.*

No se sabe si vale o no un resultado análogo vale para ℓ_r (ver los comentarios respecto a este problema en [Sch15, Chapter 10]). Atravesaremos esta dificultad con la siguiente proposición, que es una versión más débil de esto, pero suficiente para nuestro propósitos. Nos inspiramos en [DGMPG08, Lemma 2] y [DGMSP19, Proposition 10.14].

Proposición 7.1.2. *Sean $1 < r < \infty$ y $u, z \in B_{\ell_r}$ tales $|u_n| \leqslant |z_n|$ para $1 \leqslant n \leqslant N$ y $|u_n| = |z_n|$ para $n > N$. Supongamos que existe $\rho > \sum_{n=1}^{N} |z_n|^r$ de forma que $u \in monH_\infty((1-\rho)^{1/r} B_{\ell_r})$. Entonces $z \in monH_\infty(B_{\ell_r})$.*

Demostración. Sean $a_1, \ldots, a_N$ números reales y positivos tales que $|z_i| < a_i$ para todo $1 \leqslant i \leqslant N$ y

$$a := \sum_{n=1}^{N} a_n^r < \rho.$$

Dada una función $f \in H_\infty(B_{\ell_r})$ y $k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{N}$, definimos (siguiendo la demostración de [DGMPG08, Lemma 2])

$$f_{k_1,\ldots,k_N}(\nu) := \frac{1}{(2\pi i)^N} \int_{|w_1|=a_1} \cdots \int_{|w_N|=a_N} \frac{f(w_1, \ldots, w_N, \nu_{N+1}, \nu_{N+2}, \ldots)}{w_1^{k_1+1} \cdots w_N^{k_N+1}} dw_1 \cdots dw_N.$$

Notemos que $f_{k_1,\ldots,k_N}$ está bien definida en la bola contraída $(1-a)^{1/r} B_{\ell_r}$. Más aún, pertenece a $H_\infty((1-a)^{1/r} B_{\ell_r})$ (ya que $f \in H_\infty(B_{\ell_r})$) y vale la cota

$$\|f_{k_1,\ldots,k_N}\|_{(1-a)^{1/r} \cdot B_{\ell_r}} \leqslant \frac{\|f\|_{B_{\ell_r}}}{a_1^{k_1} \cdots a_N^{k_N}}. \tag{7.1}$$

Nuestro próximo paso será entender los coeficientes $c_\alpha(f_{k_1,\ldots,k_N})$ en relación a aquellos de f. Para cada multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots)$ con $\alpha_n \neq 0$, una aplicación de la fórmula integral de Cauchy (1.10) nos permite concluir que

$$c_\alpha(f_{k_1,\ldots,k_n}) = \begin{cases} c_{(k_1,\ldots,k_N,\alpha_{N+1},\ldots,\alpha_n)}(f) & \text{si } \alpha_1 = \cdots = \alpha_N = 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{7.2}$$

Tenemos todo lo necesario para proceder. Observemos que, como $a < \rho$, tenemos que $u \in monH_\infty((1-\rho)^{1/r} B_{\ell_r}) \subset monH_\infty((1-a)^{1/r} B_{\ell_r})$. Con la Proposición 3.1.4 y (7.1) conseguimos

$$\sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\beta(f_{k_1,\ldots,k_N})| |u_{N+1}^{\beta_1} \cdots u_{N+2}^{\beta_2} \cdots| \leqslant C_u \|f_{k_1,\ldots,k_N}\|_{(1-a)^{1/r} B_{\ell_r}} \leqslant C_u \frac{\|f\|_{B_{\ell_r}}}{a_1^{k_1} \cdots a_N^{k_N}}. \tag{7.3}$$

Usando (7.2) y (7.3) (recordar que $|u_n| = |z_n|$ para $n \geqslant N+1$) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(f)| |z^\alpha| &= \sum_{(k_1,\ldots k_N) \in \mathbb{N}_0^N} |z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N}| \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_{(k_1,\ldots,k_N,\beta)}(f)| |u_{N+1}^{\beta_1} \cdots u_{N+2}^{\beta_2} \cdots| \\ &= \sum_{(k_1,\ldots k_N) \in \mathbb{N}_0^N} |z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N}| \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\beta(f_{k_1,\ldots,k_N})| |u_{N+1}^{\beta_1} \cdots u_{N+2}^{\beta_2} \cdots| \\ &\leqslant \sum_{(k_1,\ldots k_N) \in \mathbb{N}_0^N} |z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N}| C_u \frac{\|f\|_{B_{\ell_r}}}{a_1^{k_1} \cdots a_N^{k_N}} \\ &= C_u \|f\|_{B_{\ell_r}} \prod_{n=1}^N \sum_{k_n \geqslant 0} \left(\frac{|z_n|}{a_n} \right)^{k_n} < \infty, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

Una última observación será necesaria antes de proceder con la siguiente sección. Dado un espacio de sucesiones X, para todo $f \in H_\infty(tB_X)$ y $t > 0$ la función f_t dada por

$f_t(x) = f(tx)$ para $x \in B_X$ pertenece a $H_\infty(B_X)$ y $c_\alpha(f_t) = t^{|\alpha|}c_\alpha(f)$ para todo α. Luego, si $z \in monH_\infty(B_X)$ vale que

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(f)(tz)^\alpha| = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(f)t^{|\alpha|}z^\alpha| = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |c_\alpha(f_t)z^\alpha| < \infty.$$

Esto implica que $t\ monH_\infty(B_X) \subset monH_\infty(tB_X)$ para todo espacio de sucesiones X y todo $t > 0$.
Notando que tB_X es la bola abierta unidad del espacio de sucesiones $(X, t\|\cdot\|_X)$, la inclusión previa implica que

$$t^{-1}monH_\infty(tB_X) \subset monH_\infty(t^{-1}tB_X) = monH_\infty(B_X).$$

Todo esto muestra que

$$monH_\infty(tB_X) = tmonH_\infty(B_X) \tag{7.4}$$

para todo espacio de sucesiones X y todo $t > 0$.

7.2. $monH_\infty(B_{\ell_r})$ para $1 < r \leqslant 2$

Nos enfocaremos ahora en $monH_\infty(B_{\ell_r})$ para $1 < r \leqslant 2$. El resultado más importante de esta sección es el siguiente teorema que, en cierto sentido que quedará claro luego (ver Observación 7.2.5), caracteriza la geometría del conjunto de convergencia monomial para estas familias de funciones holomorfas.

Teorema 7.2.1. *Sea $1 < r \leqslant 2$, luego*

$$\left\{z \in B_{\ell_r} : 2e\|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\|^r \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}}\right)^r + \|z\|_{\ell_r}^r < 1\right\} \subset$$
$$monH_\infty(B_{\ell_r}) \subset \left\{z \in B_{\ell_r} : \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}} \leqslant 1\right\}.$$

La inclusión superior se consigue usando técnicas probabilísticas, como en el caso de $monH_b(\ell_r)$. La inclusión superior, por otro lado, recae sobre el Teorema 6.2.3 y requiere algún trabajo preliminar que comienza con el siguiente lema.

Lema 7.2.2. *Sea $1 < r \leqslant 2$, entonces, $\frac{1}{\|id:m_{\Psi_r}\to\ell_r\|(2e)^{1/r}} B_{m_{\Psi_r}} \subset monH_\infty(B_{\ell_r})$.*

Demostración. Para mantener la prueba legible consideremos $K = \|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\|(2e)^{1/r}$. Veamos primero que, si $z \in \frac{1}{K}B_{m_{\Psi_r}}$ es no decreciente, entonces $z \in monH_\infty(B_{\ell_r})$. El resultado general se sigue de que $B_{m_{\Psi_r}}$ y $monH_\infty(B_{\ell_r})$ son ambos conjuntos simétricos (Corolario 3.3.6). Consideremos cierta función $f \in H_\infty(B_{\ell_r})$ y fijemos $\varepsilon > 0$ de manera que

$(1+\varepsilon)^{1/r}\|z\|_{m_{\Psi_r}}K<1$. Por el Teorema 6.2.3 podemos encontrar $C_r(\varepsilon)>0$ de forma que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}|c_\alpha(f)z^\alpha| &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}|c_{\mathbf{j}}(f)z_{\mathbf{j}}| \\
&\leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{m=0}^{\infty}C_r(\varepsilon)m^{2+\frac{1}{r}}(1+\varepsilon)^{\frac{m}{r}}K^m\|z\|_{m_{\Psi_r}}^m\sup_{u\in B_{\ell_r^n}}\left|\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}c_{\mathbf{j}}(f)u_{\mathbf{j}}\right| \\
&\leqslant \sum_{m=0}^{\infty}C_r(\varepsilon)\left(m^{\frac{1}{m}(2+\frac{1}{r})}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{r}}K\|z\|_{m_{\Psi_r}}\right)^m\|P_m(f)\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r)} \\
&\leqslant \|f\|_{B_{\ell_r}}C_r(\varepsilon)\sum_{m=0}^{\infty}\left(m^{\frac{1}{m}(2+\frac{1}{r})}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{r}}K\|z\|_{m_{\Psi_r}}\right)^m.
\end{aligned}$$

La elección de ε y el hecho de que $m^{\frac{1}{m}(2+\frac{1}{r})}\to 1$ cuando $m\to\infty$ inmediatamente implican que la serie converge, y esto completa la prueba. □

Estamos ahora en condiciones de probar el Teorema 7.2.1.

Demostración del Teorema 7.2.1. Comencemos con la inclusión superior

$$monH_\infty(B_{\ell_r})\subset\Big\{z\in B_{\ell_r}:\ \limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}}\leqslant 1\Big\}.$$

Fijemos $z\in monH_\infty(B_{\ell_r})$. Argumentando como en la demostración de la inclusión superior del Teorema 6.2.1, procediendo como en (6.2), reemplazando el rol del Lema 6.2.2 por la Proposición 3.1.4, al igual que en (6.3) conseguimos

$$\sum_{j=1}^n|z_j^*|\leqslant C_{z^*,r}^{\frac{1}{m}}\left[\log(m)^{\frac{1}{m}}(2\pi m)^{\frac{1}{2m}}e^{\frac{1}{12m^2}}\frac{m}{e}n^{\frac{1}{m}}\right]^{1-\frac{1}{r}}.$$

donde $C_{z^*,r}$ es una constante positiva que depende sólo de z^* y r. Eligiendo $m=\lfloor\log(n+1)\rfloor$ tenemos que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\log(n+1)^{1-\frac{1}{r}}}\sum_{k=1}^n|z_n^*|\leqslant 1,$$

que es lo que queríamos.

Veamos ahora la inclusión inferior

$$\Big\{z\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}:\ 2e\|id:m_{\Psi_r}\to\ell_r\|^r\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}}\right)^r+\|z\|_{\ell_r}^r<1\Big\}\subset monH_\infty(B_{\ell_r}).$$

Para mantener la notación lo más simple posible, sea $K=2e\|id:m_{\Psi_r}\to\ell_r\|^r$. Tomemos $z\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tal que

$$K\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}}\right)^r+\|z\|_{\ell_r}^r<1,$$

y observemos que esto implica que $z \in B_{\ell_r}$. Denotemos $L := \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}}$, consideremos $\varepsilon > 0$ de forma que

$$K\big((1+\varepsilon)L\big)^r + \|z\|_{\ell_r}^r < 1, \tag{7.5}$$

y $N \in \mathbb{N}$ para el cual

$$\sup_{n\geqslant N} \frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}} < (1+\varepsilon)L.$$

Notemos que

$$z_N^* < \frac{\log(N+1)^{1-1/r}}{N}(1+\varepsilon)L, \tag{7.6}$$

(lo cual se prueba esencialmente como en la Observación 6.2.4) y definamos $u = (\underbrace{z_N^*, \ldots, z_N^*}_{N}, z_{N+1}^*, z_{N+2}^*, \ldots)$.

Primero, para todo $n < N$, usando (7.6), tenemos

$$\frac{\sum_{k=1}^n u_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}} < (1+\varepsilon)L.$$

Por otro lado, para $n \geqslant N$, vale

$$\frac{\sum_{k=1}^n u_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}} < (1+\varepsilon)L.$$

Todo esto junto implica que $\|u\|_{m_{\Psi_r}} < (1+\varepsilon)L$. Elijamos $\rho > \sum_{k=1}^N |z_k|^r$ de manera que

$$\|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\|^r (2e)(L(1+\varepsilon))^r + \rho < 1,$$

y, usando (7.5) se sigue que

$$\|u\|_{m_{\Psi_r}} < (1+\varepsilon)L < \frac{(1-\rho)^{1/r}}{\|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\|(2e)^{1/r}}.$$

El Lema 7.2.2 junto con la ecuación (7.4) implican que $u \in monH_\infty((1-\rho)^{1/r}B_{\ell_r})$. Luego la Proposición 7.1.2 nos permite concluir que $z^* \in monH_\infty(B_{\ell_r})$. Finalmente, gracias al Corolario 3.3.6 podemos asegurar que $z \in monH_\infty(B_{\ell_r})$, como queríamos. $\square$

Observación 7.2.3. El Teorema 7.2.1 implica los resultados previos que buscan describir al conjunto de convergencia monomial de $H_\infty(B_{\ell_r})$. Notemos primero que, si $z \in \ell_1$, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}} = 0.$$

Luego

$$B_{\ell_r} \cap \ell_1 \subset \left\{ z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : 2e\|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\|^r \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}} \right)^r + \|z\|_{\ell_r}^r < 1 \right\}.$$

Por otro lado, si $z \in B_{\ell_r}$ es tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}} \leqslant 1$$

entonces existe una contante $c > 0$ de forma que

$$z_n^* \leqslant c\frac{\log(n+1)^{1-1/r}}{n}.$$

De esta desigualdad se consigue fácilmente que $z \in \ell_{1+\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$, y recuperamos el resultado de [DMP09] (ver (3.8)).

El siguiente resultado permite extender el resultado en (3.10) agrandando el rango de valores para θ de $(1/2, \infty)$ a $(0, \infty)$. Esto resuelve una pregunta explícita hecha en [BDS19, Remark 5.9]. Más aún, el resultado nos permite tomar $\theta = 0$ si multiplicamos a la sucesión por una constante. Esto significa que, en algún sentido, el Teorema 7.2.1 da efectivamente una mejor comprensión de $monH_\infty(B_{\ell_r})$ para $1 < r \leqslant 2$.

Corolario 7.2.4. *Sea $1 < r \leqslant 2$, luego, para todo $\theta > 0$, se tiene*

$$\left(\frac{1}{n^{1/r'}\log(n+2)^\theta}\right)_{n\geqslant 1} \cdot B_{\ell_r} \subset monH_\infty(B_{\ell_r}). \tag{7.7}$$

Más aún, si $K = \frac{1}{(2e\|id:m_{\Psi_r}\to\ell_r\|+1)^{1/r}}$, tenemos

$$\left(\frac{1}{Kn^{1/r'}}\right)_{n\geqslant 1} \cdot B_{\ell_r} \subset monH_\infty(B_{\ell_r}). \tag{7.8}$$

Demostración. Comencemos probando (7.7). Fijemos $\theta > 0$ y $z \in \left(\frac{1}{n^{1/r'}\log(n+2)^\theta}\right)_{n\geqslant 1} B_{\ell_r}$. Podemos considerar $w \in B_{\ell_r}$ tal que $z_n = \frac{w_n}{n^{1/r'}\log(n+1)^\theta}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $z \in c_0$, existe cierta función inyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $z_n^* = |z_{\sigma(n)}| = \frac{|w_{\sigma(n)}|}{\sigma(n)^{1/r'}\log(\sigma(n)+2)^\theta}$. Usando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\log(n+1)^{1/r'}}\sum_{l=1}^n z_l^* &= \frac{1}{\log(n+1)^{1/r'}}\sum_{l=1}^n \frac{|w_{\sigma(l)}|}{\sigma(l)^{1/r'}\log(\sigma(l)+2)^\theta} \\
&\leqslant \frac{1}{\log(n+1)^{1/r'}}\left(\sum_{l=1}^n |w_{\sigma(l)}|^r\right)^{1/r}\left(\sum_{l=1}^n \frac{1}{\sigma(l)\log(\sigma(l)+2)^{r'\theta}}\right)^{1/r'} \\
&\leqslant \frac{1}{\log(n+1)^{1/r'}}\left(\sum_{l=1}^n \frac{1}{\sigma(l)\log(\sigma(l)+2)^{r'\theta}}\right)^{1/r'} \\
&\leqslant \frac{1}{\log(n+1)^{1/r'}}\left(\sum_{l=1}^n \frac{1}{l\log(l+2)^{r'\theta}}\right)^{1/r'},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale gracias a que $x \mapsto \frac{1}{x\log(x+2)^{r'\theta}}$ define una función decreciente para $x > 1$. Este último término, $\frac{1}{\log(n+1)^{1/r'}}\left(\sum_{l=1}^n \frac{1}{l\log(l+2)^{r'\theta}}\right)^{1/r'}$, va a 0 cuando $n \to \infty$, y luego

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n+1)^{1/r'}} \sum_{l=1}^n z_l^* = 0.$$

De hecho, supongamos que $\theta < \frac{1}{r'}$ (lo cual podemos hacer ya que $\frac{1}{l\log(l+2)^{r'\theta}}$ es decreciente en θ). Luego, existe cierta constante $C_{r',\theta} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{l=1}^n \frac{1}{l\log(l+2)^{r'\theta}}\right)^{1/r'} &\leqslant C_{r',\theta}\left(\int_{l=2}^n \frac{1}{x\log(x)^{r'\theta}}dx\right)^{1/r'} \\ &= C_{r',\theta}\left(\int_{l=\log(2)}^{\log(n)} \frac{1}{y^{r'\theta}}dy\right)^{1/r'} \\ &\leqslant C_{r',\theta}\log(n)^{-\theta+\frac{1}{r'}},\end{aligned}$$

Tenemos entonces que $\frac{1}{\log(n+1)^{1/r'}}\left(\sum_{l=1}^n \frac{1}{l\log(l+2)^{r'\theta}}\right)^{1/r'} \leqslant C_{r',\theta}\log(n)^{-\theta} \to 0$.

Por otro lado, como $z \in B_{\ell_r}$ (notemos que $|z_n| \leqslant |w_n|$ para todo n y $w \in B_{\ell_r}$), luego

$$2e\|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\|^r \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n z_l^*}{\log(n+1)^{1-1/r}}\right)^r + \|z\|_{\ell_r}^r = \|z\|_{\ell_r}^r < 1,$$

y, por el Teorema 7.2.1, $z \in monH_\infty(B_{\ell_r})$.

Para probar (7.8), tomemos $z = \left(\frac{1}{Kn^{1/r'}}w_n\right)_{n\geqslant 1}$ con $w \in B_{\ell_r}$, y notemos que $\|z\|_{\ell_r}^r < \frac{1}{K^r}$. Gracias a que $z \in c_0$, existe una función inyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $z_n^* = |z_{\sigma(n)}| = \frac{|w_{\sigma(n)}|}{K\sigma(n)^{1/r'}}$. Usando la desigualdad de Hölder se sigue que

$$\begin{aligned}\frac{K}{\log(n+1)^{1/r'}}\sum_{l=1}^n z_l^* &= \frac{1}{\log(n+1)^{1/r'}}\sum_{l=1}^n \frac{|w_{\sigma(l)}|}{\sigma(l)^{1/r'}} \\ &\leqslant \frac{1}{\log(n+1)^{1/r'}}\left(\sum_{l=1}^n |w_{\sigma(l)}|^r\right)^{1/r}\left(\sum_{l=1}^n \frac{1}{\sigma(l)}\right)^{1/r'} \\ &\leqslant \frac{1}{\log(n+1)^{1/r'}}\left(\sum_{l=1}^n \frac{1}{\sigma(l)}\right)^{1/r'} \\ &\leqslant \frac{1}{\log(n+1)^{1/r'}}\left(\sum_{l=1}^n \frac{1}{l}\right)^{1/r'} \leqslant 1.\end{aligned}$$

Como $K = (2e\|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\|^r + 1)^{1/r}$, tenemos

$$2e\|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\|^r \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n z_l^*}{\log(n+1)^{1-1/r}}\right)^r + \|z\|_{\ell_r}^r < (2e\|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\|^r + 1)\frac{1}{K^r} = 1.$$

Por último, el Teorema 7.2.1 da la conclusión. $\square$

Analicemos el Teorema 7.2.1 de forma cualitativa. Observemos que, dado $1 < r \leqslant 2$, podemos definir la siguiente dos normas

$$\|z\|_{A_r} = \text{máx}\left\{\|z\|_{\ell_r}, \frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}}\right\}, \tag{7.9}$$

$$\|z\|_{\tilde{A}_r} = K_r\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}}\right)^r + \|z\|_{\ell_r}^r \tag{7.10}$$

para todo $z \in m_{\Psi_r}$ con $K_r = 2e\|id : m_{\Psi_r} \to \ell_r\|^r$. Llamemos A_r y $\tilde{A}_r$ a los espacios definidos a través de estas normas respectivamente. Recordemos la conocida cota

$$\text{máx}\{|a|,|b|\} \leqslant (|a|^r + |b|^r)^{1/r} \leqslant 2^{\frac{1}{r}} \text{máx}\{|a|,|b|\}, \tag{7.11}$$

que vale para todo $1 \leqslant r < \infty$ y todo par $a, b \in \mathbb{C}$. Gracias a (7.11), las normas definidas en (7.9) y (7.10) son equivalentes. Así, para cierta constante $C_r > 0$, vale que

$$C_r \cdot B_{A_r} \subset B_{\tilde{A}_r}. \tag{7.12}$$

Notemos que

$$B_{A_r} = \left\{z \in B_{\ell_r} : \limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}} \leqslant 1\right\},$$

$$B_{\tilde{A}_r} = \left\{z \in B_{\ell_r} : K_r\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n z_k^*}{\log(n+1)^{1-1/r}}\right)^r + \|z\|_{\ell_r}^r < 1\right\},$$

luego gracias al Teorema 7.2.1 y a la inclusión de conjunto en (7.12) se sigue que

$$C_r \cdot B_{A_r} \subset monH_\infty(B_{\ell_r}) \subset \overline{B_{A_r}} \tag{7.13}$$

Observación 7.2.5. Si esperamos un resultado como en (6.6), i.e.,

$$B_r \subset monH_\infty(B_{\ell_r}) \subset \overline{B_r},$$

con B_r la bola de un espacio normado, entonces las cotas en (7.13) implican que esa norma debe ser equivalente a la norma en A_r. En este sentido el Teorema 7.2.1 caracteriza la geometría de $monH_\infty(B_{\ell_r})$.

Para finalizar este capítulo aplicaremos algunos resultados de esta sección para dar una nueva forma de atacar un problema que ya hemos tratado en el Capítulo 5.

7.3. Radio de Bohr mixto revisitado

En esta última sección presentamos una aplicación de los resultados dados en este capítulo al radio de Bohr mixto. Como consecuencia del Lema 6.2.5 podemos dar una prueba alternativa de las cotas inferiores para $K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n})$ en el caso en que $1 \leqslant p \leqslant 2$ (y todo $1 \leqslant q \leqslant \infty$). Mostraremos ahora un hecho que ya probamos en la Sección 5.5.3, esto es, que para $1 < q < p \leqslant 2$ vale

$$\frac{\log(n)^{1-1/p}}{n^{1-1/q}} \ll K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}).$$

Por el Teorema 4.2.2 y el Lema 7.2.2, existe cierta constante $C := C(p) > 0$ de forma que para todo polinomio m-homogéneo P en n variables complejas tenemos

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}| \leqslant C^m \|z\|_{(m_{\Psi_p})_n}^m \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)}, \tag{7.14}$$

donde $(m_{\Psi_p})_n$ se define como el espacio cociente inducido por la aplicación

$$\begin{aligned} \pi_n : m_{\Psi_p} &\to \mathbb{C}^n \\ x &\mapsto (x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Notemos que existe una constante $D = D(p,q) > 0$ tal que $\|z\|_{(m_{\Psi_p})_n} \leqslant D \frac{n^{1-\frac{1}{q}}}{\log(n)^{1-\frac{1}{p}}} \|z\|_{\ell_q^n}$. Por lo tanto, por (7.14) tenemos

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}| \leqslant (CD)^m \left(\frac{n^{1-\frac{1}{q}}}{\log(n)^{1-\frac{1}{p}}} \right)^m \|z\|_{\ell_q^n}^m \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)},$$

Esto implica que $\chi_{p,q}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n))^{1/m} \ll \frac{n^{1-\frac{1}{q}}}{\log(n)^{1-\frac{1}{p}}}$. Notemos que es importante el tener un control del crecimiento de la constante de incondicionalidad (p,q)-mixta en términos de m (el grado de homogeneidad), de hecho necesitamos tener hipercontractividad en (7.14). El resultado se sigue usando el Lema 5.3.2, i.e.,

$$K(B_{\ell_p^n}, B_{\ell_q^n}) \sim \frac{1}{\sup_{m \geqslant 1} \chi_{p,q}(\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n))^{1/m}}.$$

Capítulo 8

Convergencia monomial para $\mathcal{P}(^m\ell_r)$

En este capítulo final nos concentramos nuevamente en el conjunto de convergencia monomial de los polinomios homogéneos. Dado $1 < r \leqslant 2$ y $m \geqslant 2$ fijos hemos visto en la Sección 3.4 que

$$\ell_q \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_r),$$

para $q = (mr')'$ contestando una pregunta abierta. Nuestro objetivo será ajusta esta cota inferior.

Teorema 8.0.1. *Fijados $1 < r \leqslant 2$ y $m \geqslant 2$ sea $q := (mr')'$. Luego $\ell_q \subset mon\mathcal{P}(^2\ell_r)$; $\ell_{q,2} \subset mon\mathcal{P}(^3\ell_r)$; $\ell_{q,\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \subset mon\mathcal{P}(^4\ell_r)$ y*

$$\ell_{q,\frac{m}{\log(m)}} \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_r).$$

para $m \geqslant 5$.

Nuestro punto de partida serán los resultados probados en la Sección 3.4. De esta manera, el Corolario 3.4.2 prueba el caso $m = 2$ en el Teorema 8.0.1. Buscaremos ahora mejorar el resultado para los otros valores de m. La filosofía general será siempre intentar conseguir cotas como en el Teorema 3.4.1. Allí, en el lado derecho de la desigualdad hay constantes que dependen de r y m (pero no de n, el número de variables), la norma del polinomio y la norma de z en cierto espacio X. Esto implica que $X \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_r)$. De ahora en adelante la idea será tomar la suma dependiendo de m variables diferentes; esto es, para cada polinomio P consideraremos

$$\sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_m\leqslant n} |c_{\mathbf{j}}(P) z^{(1)}_{j_1} \dots z^{(m)}_{j_m}| \tag{8.1}$$

con $z^{(1)}, \dots, z^{(m)} \in \mathbb{C}^n$, e intentaremos lograr una cota para esa suma que involucre la norma de los elementos $z^{(j)}$ en (posiblemente) diferentes espacios. Esto dará luego que el más pequeño de estos espacios está contenido en el conjunto de convergencia monomial (ver la Observación 8.2.2). Haremos esto (dando la prueba del Teorema 8.0.1) en dos etapas, que se encuentran en las siguientes dos secciones. Primero daremos estimaciones para la suma que involucran las normas en los espacios $\ell_{q,1}$ y $\ell_{q,\infty}$ (el enunciado preciso está en la Proposición 8.1.1). Usaremos esta desigualdad para lograr cotas para operadores saliendo de $\ell_{q,\infty} \times \cdots \times \ell_{q,\infty} \times \ell_{q,1} \times \ell_{q,\infty} \times \cdots \times \ell_{q,\infty}$ y llegando a $\ell_1(\mathcal{J}(m,n))$ y luego, mediante técnicas de interpolación, mejoraremos la norma en $\ell_{q,1}$ (debilitando la norma en $\ell_{q,\infty}$). Esto lo realizaremos en el Teorema 8.2.1. Sucede que, como en la estimación en la Proposición 8.1.1, algunas de las variables deben ser elementos decrecientes por lo que no podemos usar teoremas clásicos de interpolación multilineal. Es por esto que usaremos en cambio interpolación en conos (se da una explicación más detallada en la Sección 8.2).

8.1. Primera cota para la suma

Como anunciamos, nuestro primer paso hacia la demostración del Teorema 8.0.1 será conseguir cotas para una suma como en (8.1). El siguiente es el resultado principal de esta sección.

Proposición 8.1.1. *Dados $1 < r \leqslant 2$ y $m \geqslant 2$ consideremos $q := (mr')'$. Luego, existe una constante $C_{m,r} > 1$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, todo polinomio homogéneo $P \in \mathcal{P}({}^m\mathbb{C}^n)$, $z^{(1)}, \ldots, z^{(m)} \in \mathbb{C}^n$ y $1 \leqslant k \leqslant m-1$ vale que*

$$\sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_m \leqslant n} \left| c_{\mathbf{j}}(P) z^{(1)}_{j_1} \cdots z^{(k)}_{j_k} z^{(k+1)*}_{j_{k+1}} \cdots z^{(m)*}_{j_m} \right| \leqslant C_{m,r} \|z^{(k)}\|_{\ell_{q,1}} \prod_{i \neq k} \|z^{(i)}\|_{\ell_{q,\infty}} \|P\|_{\mathcal{P}({}^m\ell_r^n)} .$$

La prueba requiere una serie de lemas, pero primero, haremos algunos comentarios elementales. Primero, por definición,

$$z^*_k \leqslant \|z\|_{\ell_{q,\infty}} \frac{1}{k^{1/q}} \tag{8.2}$$

para todo $z \in \mathbb{C}^n$ y, luego

$$\sum_{k=N}^{M} z^*_k \leqslant \|z\|_{\ell_{q,\infty}} \sum_{k=N}^{M} \frac{1}{k^{1/q}} . \tag{8.3}$$

Además, para $-1 \neq \alpha < 0$,

$$\sum_{k=N}^{M} n^\alpha = N^\alpha + \sum_{k=N+1}^{M} n^\alpha \leqslant N^\alpha + \int_N^M x^\alpha dx = N^\alpha + \frac{1}{\alpha+1}\big(M^{\alpha+1} - N^{\alpha+1}\big) . \tag{8.4}$$

Lema 8.1.2. *Sean $n, k \geqslant 1$ y $1 \leqslant q < \infty$. Luego para todo $z^{(1)}, \ldots, z^{(k)} \in \mathbb{C}^n$ y $1 \leqslant j \leqslant n$ vale que*

$$\sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_k \leqslant j} |z^{(1)}_{j_1} \ldots z^{(k)}_{j_k}| \leqslant (q')^k j^{\frac{k}{q'}} \prod_{1 \leqslant i \leqslant k} \|z^{(i)}\|_{\ell_{q,\infty}} .$$

Demostración. Procedemos por inducción en k. Para $k=1$ el enunciado es una consecuencia de (8.3) y (8.4). Asumamos que el resultado vale para $k-1$. Luego

$$\sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant j}|z^{(1)}_{j_1}\cdots z^{(k)}_{j_l}| = \sum_{j_k=1}^{j}|z^{(k)}_{j_k}|\Big(\sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_{k-1}\leqslant j_k}|z^{(1)}_{j_1}\ldots z^{(k-1)}_{j_{k-1}}|\Big)$$
$$\leqslant (q')^{k-1}\prod_{1\leqslant i\leqslant k-1}\|z^{(i)}\|_{\ell_{q,\infty}} j_k^{\frac{k-1}{q'}}\sum_{j_k=1}^{j}|z^{(k)}_{j_k}| \leqslant (q')^k j^{\frac{k-1}{q'}} j^{\frac{1}{q'}}\prod_{1\leqslant i\leqslant k}\|z^{(i)}\|_{\ell_{q,\infty}},$$

que es lo que queríamos probar. □

Lema 8.1.3. *Sean $1<r\leqslant 2$, $m\geqslant 3$ y $n\in\mathbb{N}$. Fijados $q:=(mr')'$ y $1\leqslant k\leqslant m-2$, para todo $z^{(i_1)},\ldots,z^{(i_k)}\in\mathbb{C}^n$ y $1\leqslant t\leqslant n$ vale que*

$$\sum_{t\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant n}|z^{(i_1)*}_{j_1}\ldots z^{(i_k)*}_{j_k}|j_k^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \leqslant \Big(\prod_{1\leqslant l\leqslant k}\big(\frac{mr'}{m-l-1}+\frac{1}{t}\big)\Big)t^{\frac{k+1}{q'}-\frac{1}{r'}}\Big(\prod_{1\leqslant l\leqslant k}\|z^{(i_l)}\|_{\ell_{q,\infty}}\Big).$$

Demostración. Para empezar notemos que un simple cálculo muestra que $\frac{s}{q'}-\frac{1}{r'}\leqslant -\frac{1}{mr'}<0$ para todo $1\leqslant s\leqslant m-1$. Ahora procedemos por inducción en k. Para $k=1$ usamos (8.3) y (8.4) para lograr

$$\sum_{j=t}^{n}|z^*_j|j^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \leqslant \|z\|_{\ell_{q,\infty}}\sum_{j=t}^{n}j^{\frac{2}{q'}-\frac{1}{r'}-1}$$
$$\leqslant \|z\|_{\ell_{q,\infty}}\Big(t^{\frac{2}{q'}-\frac{1}{r'}}-\big(\frac{2}{q'}-\frac{1}{r'}\big)^{-1}t^{\frac{2}{q'}-\frac{1}{r'}}\Big) = \big(\frac{r'm}{m-2}+\frac{1}{t}\big)t^{\frac{2}{q'}-\frac{1}{r'}}\|z\|_{\ell_{q,\infty}}.$$

Supongamos ahora que el enunciado vale para $k-1$ y veamos que es cierto para k. Acotando la suma

$$\sum_{t\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant n}|z^{(i_1)*}_{j_1}\cdots z^{(i_k)*}_{j_k}|j_k^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}$$
$$= \sum_{j_1=t}^{n}|z^{(i_1)*}_{j_1}|\sum_{j_1\leqslant j_2\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant n}|z^{(i_2)*}_{j_2}\ldots z^{(i_k)*}_{j_k}|j_k^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}$$
$$\leqslant \sum_{j_1=t}^{n}|z^{(i_1)*}_{j_1}|\Big(\prod_{1\leqslant l\leqslant k-1}\big(\frac{mr'}{m-l-1}+\frac{1}{j_1}\big)\Big)j_1^{\frac{k}{q'}-\frac{1}{r'}}\Big(\prod_{2\leqslant l\leqslant k}\|z^{(i_l)}\|_{\ell_{q,\infty}}\Big)$$
$$\leqslant \Big(\prod_{1\leqslant l\leqslant k-1}\big(\frac{mr'}{m-l-1}+\frac{1}{t}\big)\Big)\Big(\prod_{2\leqslant l\leqslant k}\|z^{(i_l)}\|_{\ell_{q,\infty}}\Big)\sum_{j_1=t}^{n}|z^{(i_1)*}_{j_1}|j_1^{\frac{k}{q'}-\frac{1}{r'}}$$
$$\leqslant \Big(\prod_{1\leqslant l\leqslant k-1}\big(\frac{mr'}{m-l-1}+\frac{1}{t}\big)\Big)\Big(\prod_{1\leqslant l\leqslant k}\|z^{(i_l)}\|_{\ell_{q,\infty}}\Big)\sum_{j_1=t}^{n}j_1^{\frac{k+1}{q'}-\frac{1}{r'}-1}$$
$$\leqslant \Big(\prod_{1\leqslant l\leqslant k-1}\big(\frac{mr'}{m-l-1}+\frac{1}{t}\big)\Big)\Big(\prod_{1\leqslant l\leqslant k}\|z^{(i_l)}\|_{\ell_{q,\infty}}\Big)t^{\frac{k+1}{q'}-\frac{1}{r'}}\Big(\frac{1}{t}-\big(\frac{k+1}{q'}-\frac{1}{r'}\big)^{-1}\Big)$$
$$= \Big(\prod_{1\leqslant l\leqslant k-1}\big(\frac{mr'}{m-l-1}+\frac{1}{t}\big)\Big)\Big(\prod_{1\leqslant l\leqslant k}\|z^{(i_l)}\|_{\ell_{q,\infty}}\Big)t^{\frac{k+1}{q'}-\frac{1}{r'}}\Big(\frac{1}{t}+\frac{mr'}{m-k-1}\Big),$$

tenemos lo que buscamos. $\square$

Lema 8.1.4. *Sean* $1 < r \leqslant 2$ *y* $m \geqslant 3$*. Fijados* $q := (mr')'$ *y* $1 \leqslant k \leqslant m-2$*, para cada* $z^{(1)}, \dots, z^{(k)} \in \mathbb{C}^n$ *vale que*

$$\sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_{m-1} \leqslant n} |z^{(1)}_{j_1} \cdots z^{(k)}_{j_k} z^{(k+1)*}_{j_{k+1}} \cdots z^{(m-1)*}_{j_{m-1}}| j_{m-1}^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \leqslant (q'+1)^{m-2} \|z^{(k)}\|_{\ell_{q,1}} \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m-1 \\ i \neq k}} \|z^{(i)}\|_{\ell_{q,\infty}} .$$

Demostración. Comencemos por separar la suma de una forma conveniente, del siguiente modo

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_{m-1} \leqslant n} |z^{(1)}_{j_1} \cdots z^{(k)}_{j_k} z^{(k+1)*}_{j_{k+1}} \cdots z^{(m-1)*}_{j_{m-1}}| j_{m-1}^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \\ &= \sum_{j_k=1}^{n} |z^{(k)}_{j_k}| \Big(\sum_{j_k \leqslant j_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant j_{m-1} \leqslant n} |z^{(k+1)*}_{j_{k+1}} \cdots z^{(m-1)*}_{j_{m-1}}| j_{m-1}^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \Big) \Big(\sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_{k-1} \leqslant j_k} |z^{(1)}_{j_1} \cdots z^{(k-1)}_{j_{k-1}}| \Big) . \end{aligned}$$

Fijemos j_k y acotemos el primer bloque usando el Lema 8.1.3, tomando en cuenta que ahora hay $m-k-1$ z's y que $\frac{1}{j_k} + \frac{mr'}{m-l-1} \leqslant q'+1$ para todo $1 \leqslant l \leqslant m-k-1$,

$$\begin{aligned} &\sum_{j_k \leqslant j_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant j_{m-1} \leqslant n} |z^{(k+1)*}_{j_{k+1}} \cdots z^{(m-1)*}_{j_{m-1}}| j_{m-1}^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \\ &\qquad \leqslant j_k^{\frac{m-k}{q'}-\frac{1}{r'}} \Big(\prod_{1 \leqslant l \leqslant m-k-1} \frac{1}{j_k} + \frac{mr'}{m-l-1} \Big) \Big(\prod_{k+1 \leqslant i \leqslant m-1} \|z^{(i)}\|_{\ell_{q,\infty}} \Big) \\ &\qquad\qquad \leqslant j_k^{\frac{m-k}{q'}-\frac{1}{r'}} (q'+1)^{m-k-1} \prod_{k+1 \leqslant i \leqslant m-1} \|z^{(i)}\|_{\ell_{q,\infty}} . \end{aligned}$$

Con esto, y acotando el segundo bloque usando el Lema 8.1.2 tenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_{m-1} \leqslant n} |z^{(1)}_{j_1} \cdots z^{(k)}_{j_k} z^{(k+1)*}_{j_{k+1}} \cdots z^{(m-1)*}_{j_{m-1}}| j_{m-1}^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \\ &\qquad \leqslant (q'+1)^{m-2} \prod_{i \neq k} \|z^{(i)}\|_{\ell_{q,\infty}} \sum_{j_k=1}^{n} |z^{(k)}_{j_k}| j_k^{\frac{k-1}{q'}+\frac{m-k}{q'}-\frac{1}{r'}} . \end{aligned}$$

Es sencillo ver que $\frac{k-1}{q'} + \frac{m-k}{q'} - \frac{1}{r'} = \frac{1}{q} - 1$. Por lo tanto, usando la *desigualdad de reordenamiento de Hardy-Littlelwood* en el Lema 6.3.5 tenemos que

$$\sum_{j_k=1}^{n} |z^{(k)}_{j_k}| j_k^{\frac{1}{q}-1} \leqslant \sum_{j_k=1}^{n} |(z^{(k)})^*_{j_k}| j_k^{\frac{1}{q}-1} = \|z^{(k)}\|_{\ell_{q,1}}. \qquad \square$$

Como en el caso de funciones holomorfas, el Teorema 2.1.7 (de hecho (2.9)) será una herramienta crucial para probar la Proposición 8.1.1.

Demostración de la Proposición 8.1.1. Comenzaremos usando la desigualad de Hölder y (2.9) (notando que $|\mathbf{i}| \leqslant (m-1)!$ para todo $\mathbf{i} \in \mathcal{J}(m-1,n)$) y (8.2) para conseguir

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \left|c_{\mathbf{j}}(P) z^{(1)}_{j_1}\cdots z^{(k)}_{j_k} z^{(k+1)*}_{j_{k+1}}\cdots z^{(m)*}_{j_m}\right| \\
&\quad= \sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_{m-1}\leqslant n} |z^{(1)}_{j_1}\ldots z^{(m-1)*}_{j_{m-1}}| \sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} |c_{\mathbf{j}}(P) z^{(m)*}_{j_m}| \\
&\quad\leqslant \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-1,n)} |z^{(1)}_{j_1}\ldots z^{(m-1)*}_{j_{m-1}}| \Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} c_{\mathbf{j}}(P)^{r'}\Big)^{\frac{1}{r'}} \Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} |z^{(m)*}_{j_m}|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \\
&\quad\leqslant (m-1)!^{\frac{1}{r}} m e^{1+\frac{m-1}{r}} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \|z^{(m)}\|_{\ell_{q,\infty}} \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-1,n)} |z^{(1)}_{j_1}\ldots z^{(m-1)*}_{j_{m-1}}| \Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} j_m^{-\frac{r}{q}}\Big)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Observemos que, para cada $N \in \mathbb{N}$ tenemos que $N^{-r/q} \leqslant 2^{r/q} x^{-r/q}$ siempre que $N \leqslant x < N+1$. Luego,

$$\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} j_m^{-\frac{r}{q}} \leqslant 2^{\frac{r}{q}} \int_{j_{m-1}}^{n} x^{-\frac{r}{q}} dx \leqslant 2^{\frac{r}{q}} \frac{q}{r-q} j_{m-1}^{1-\frac{r}{q}}.$$

Gracias al Lema 8.1.4 tenemos lo que queríamos. □

8.2. Interpolación real en conos

Ahora miraremos la desigualdad de sumabilidad para polinomios a través de una forma multilineal asociada a este. Fijemos un polinomio $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y consideremos la aplicación $\mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n \to \ell_1(\mathcal{J}(m,n))$, dado por

$$(z^{(1)},\ldots,z^{(m)}) \mapsto \big(c_{\mathbf{j}}(P) z^{(1)}_{j_1}\ldots z^{(m)}_{j_m}\big)_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}. \tag{8.5}$$

Notemos que, gracias a que todos los espacios involucrado son de dimensión finita, la aplicación está bien definida. La idea es, luego, considerar las normas en los espacios del dominio de manera que esta forma multilineal esté acotada por un término que involucre la norma del polinomio original y alguna constante independiente de n. Como la desigualdad en la Proposición 8.1.1 requiere que algunas variables sean decrecientes debemos restringirnos al cono de sucesiones decrecientes. Siendo más precisos, si denotamos $\ell^d_{q,s} := \{z \in \ell_{q,s} \colon |z| = z^*\}$ con $1 \leqslant q,s \leqslant \infty$, la Proposición 8.1.1 dice que existe una constante $C_{m,r} > 1$ (independiente de P y n) de forma que, para todo $1 \leqslant k \leqslant m-1$, la aplicación

$$T_k : \underbrace{\ell^n_{q,\infty} \times \cdots \times \ell^n_{q,\infty}}_{k-1} \times \ell^n_{q,1} \times \underbrace{(\ell^n_{q,\infty})^d \times \cdots \times (\ell^n_{q,\infty})^d}_{m-k} \to \ell_1(\mathcal{J}(m,n)), \tag{8.6}$$

dada por (8.5) satisface

$$\|T_k\| \leqslant C_{m,r} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell^n_r)}. \tag{8.7}$$

Todas estas aplicaciones tienen la misma fórmula (que es m-lineal), lo cual sugiere el uso de interpolación multilineal. Pero, como debemos restringirnos al cono de sucesiones no crecientes en las últimas $m-k$ variables, no será posible aplicar directamente los resultados clásicos de interpolación multilineal, y tendremos que aplicar la interpolación en conos.

Hasta donde sabemos, no existe una teoría de interpolación de formas multilineales definidas en conos de espacios normados. Utilizaremos el K-método de interpolación para operadores en el cono de sucesiones no crecientes, tal como se presenta en [CM96]. El resultado principal de esta sección, del cual sigue el Teorema 8.0.1 es el siguiente.

Teorema 8.2.1. *Sean $1 < r \leqslant 2$ y $m \geqslant 3$. Consideremos $q := (mr')'$ y*

$$s = \begin{cases} 2 & \text{if } m = 3 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} & \text{if } m = 4 \\ \frac{m}{\log(m)} & \text{if } m \geqslant 5 \end{cases}$$

Existe una constante $C_{m,r} \geqslant 1$ tal que, para todo polinomio homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ la forma m-lineal

$$T : \underbrace{(\ell_{q,s}^n)^d \times \cdots \times (\ell_{q,s}^n)^d}_{m-1} \times (\ell_{q,\infty}^n)^d \to \ell_1(\mathcal{J}(m,n))$$

dada por

$$(z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}) \mapsto \big(c_{\mathbf{j}}(P) z_{j_1}^{(1)} \ldots z_{j_m}^{(m)}\big)_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)}$$

satisface

$$\|T\| \leqslant C_{m,r} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} .$$

Observación 8.2.2. Si tomamos $z^{(1)} = \ldots = z^{(m)} = z$ y observamos que $\|z\|_{\ell_{q,\infty}} \leqslant \|z\|_{\ell_{q,s}}$, el Teorema 8.2.1 implica que

$$\sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_m \leqslant n} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{j_1}^* \cdots z_{j_m}^*| \leqslant C_{m,r} \|z\|_{\ell_{q,s}}^m \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}$$

para todo polinomio homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y $z \in \mathbb{C}^n$. Un argumento estándar muestra que $z^* \in mon\mathcal{P}(^m\ell_r)$ para $z \in \ell_{q,s}$ y, luego, el Corolario 3.3.6 implica que $\ell_{q,s} \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_r)$. Esto da el Teorema 8.0.1.

Antes de proceder, fijemos alguna notación. Dado un reticulado de Banach X de funciones (en particular un espacio de sucesiones o un espacio de Banach de dimensión finita, en los que estamos principalmente interesados), escribimos X^d para referirnos al *cono de funciones no decreciente en X*. Si Y es un espacio de Banach y $S : X \to Y$ es un operador lineal podemos restringirlo al cono. Consideramos, en la restricción,

$$\|S : X^d \to Y\| = \sup\{\|S(x)\|_Y : x \in X^d,\ \|x\| < 1\} . \tag{8.8}$$

Claramente X^d no es un espacio vectorial y tampoco $\|S\|$ da una norma. Usaremos notación análoga para las formas m-lineales. Estamos listos para establecer nuestra herramienta principal para interpolar en conos. Es un corolario directo de [CM96, Theorem 1–(b)] (recordemos que la notación que usamos es la introducida allí).

Teorema 8.2.3. *Sean un par de reticulados de funciones quasi-Banach* (X_0, X_1)*, un par de espacios quasi-Banach* (Y_0, Y_1) *y un operador lineal* S *definido tanto en* $X_0 \to Y_0$ *como en* $X_1 \to Y_1$ *con*

$$\|S : X_0^d \longrightarrow Y_0\| \leqslant M_0 \quad y \quad \|S : X_1^d \longrightarrow Y_1\| \leqslant M_1 .$$

Luego para todo $0 < \theta < 1$ *el operador* $S : (X_0^d, X_1^d)_{\theta,a} \longrightarrow (Y_0, Y_1)_{\theta,a}$ *está bien definido y*

$$\|S : (X_0^d, X_1^d)_{\theta,a} \longrightarrow (Y_0, Y_1)_{\theta,a}\| \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

Aplicaremos esto a los espacio de sucesiones de Lorentz. En este caso, fue probado en [Sag72] (ver también [CM96, Theorem 4]) que

$$(\ell_{q,p_0}^d, \ell_{q,p_1}^d)_{\theta,a} = (\ell_{q,p_0}, \ell_{q,p_1})_{\theta,a}^d .$$

Por otro lado, es sabido que (ver por ejemplo [BL76, Theorem 5.3.1]) que, siempre que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ tenemos

$$(\ell_{q,p_0}, \ell_{q,p_1})_{\theta,p} = \ell_{q,p},$$

y por lo tanto

$$(\ell_{q,p_0}^d, \ell_{q,p_1}^d)_{\theta,p} = \ell_{q,p}^d. \tag{8.9}$$

Finalmente [BL76, Theorem 3.7.1] implica que (si p_0, p_1, p están relacionados como antes) entonces

$$(\ell'_{q,p_0}, \ell'_{q,p_1})_{\theta,p} = (\ell_{q,p_0}, \ell_{q,p_1})'_{\theta,p} = \ell'_{q,p} . \tag{8.10}$$

La idea ahora es usa el Teorema 8.2.3 para interpolar formas multilineales. Veamos de que manera lograremos esto. Sean $X_1, \dots, X_m$ reticulados de Banach de funciones (en nuestro caso siempre serán espacio de Lorentz de dimensión finita), Y cierto espacio de Banach ($\ell_1(\mathcal{J}(m,n)$ para nosotros) y alguna forma m-lineal $T : X_1 \times \cdots \times X_m \to Y$ (para nosotros la dada por (8.5)). Fijemos $1 \leqslant j \neq k \leqslant m$ y, para cada $i \neq j, k$ elijamos $z^{(i)} \in X_i$ y $\varphi \in Y'$, y consideremos $v = (z^{(1)}, \dots, z^{(m)}, \varphi)$. Definamos

$$T_v : X_j \to X'_k \quad \text{por} \quad \big(T_v(z^{(j)})\big)(z^{(k)}) = \varphi(T(z^{(1)}, \dots, z^{(m)})). \tag{8.11}$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$\|T_v\| \leqslant \|\varphi\| \, \|T\| \prod_{i \neq j,k} \|z^{(i)}\| , \tag{8.12}$$

y que

$$\|T\| = \sup_{\varphi \in B_{Y'}, z^{(i)} \in B_{X_i}} \|T_v\|. \tag{8.13}$$

Observemos que en este procedimiento podemos considerar X_i^d para cada i excepto para $i = k$, obteniendo la misma estimación para la norma (definiendo la "norma" para formas multilineales en conos mediante la misma idea que en (8.8)). Estamos listos para presentar la herramienta técnica principal en la demostración del Teorema 8.2.1.

Lema 8.2.4. *Sean $m \geqslant 3$ y $1 < r \leqslant 2$. Consideremos $q := (mr')'$ y sea $C_{m,r}$ la constante de la Proposición 8.1.1. Para cada $0 < \theta < 1$, todo polinomio homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ y todo $1 \leqslant k \leqslant m-2$ la forma m-lineal*

$$T^k(\theta) : \big(\ell^n_{q,(\frac{1}{1-\theta})^k}\big)^d \times \underbrace{\big(\ell^n_{q,\frac{1}{\theta}}\big)^d \times \cdots \times \big(\ell^n_{q,\frac{1}{\theta}}\big)^d}_{k} \times \underbrace{\big(\ell^n_{q,\infty}\big)^d \times \cdots \times \big(\ell^n_{q,\infty}\big)^d}_{m-k-1} \to \ell_1(\mathcal{J}(m,n))$$

dada por (8.5) *satisface*

$$\|T^k(\theta)\| \leqslant C_{m,r}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell^n_r)}.$$

Demostración. Procedemos por inducción en k comenzando por el caso $k=1$. Consideremos las aplicaciones (ver (8.6))

$$T_1 : \ell^n_{q,1} \times \underbrace{(\ell^n_{q,\infty})^d \times (\ell^n_{q,\infty})^d \times \cdots \times (\ell^n_{q,\infty})^d}_{m-1} \to \ell_1(\mathcal{J}(m,n))$$

$$T_2 : \ell^n_{q,\infty} \times \ell^n_{q,1} \times \underbrace{(\ell^n_{q,\infty})^d \times \cdots \times (\ell^n_{q,\infty})^d}_{m-2} \to \ell_1(\mathcal{J}(m,n)).$$

Fijados $z^{(3)},\dots,z^{(m)} \in (\ell^n_\infty)^d$ y $\varphi \in \Big(\ell_1(\mathcal{J}(m,n))\Big)'$ y escribiendo $v = (z^{(3)},\dots,z^{(m)},\varphi)$ definimos, siguiendo (8.11), dos operadores lineales

$$(T_1)_v : \big(\ell^n_{q,\infty}\big)^d \to \big(\ell^n_{q,1}\big)' \quad \text{y} \quad (T_2)_v : \big(\ell^n_{q,1}\big)^d \to \big(\ell^n_{q,\infty}\big)'$$

que, gracias a (8.7) y (8.12), satisfacen (para $i = 1,2$)

$$\|(T_i)_v\| \leqslant C_{m,r}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell^n_r)}\|z^{(3)}\|_{\ell_{q,\infty}} \cdots \|z^{(m)}\|_{\ell_{q,\infty}}\|\varphi\|_{\ell_1(\mathcal{J}(m,n))'}\,.$$

Ahora interpolamos, usando el Teorema 8.2.3 y las ecuaciones (8.9) y (8.10), para conseguir

$$\Big\|\big(T^1(\theta)\big)_v : \big(\ell^n_{q,\frac{1}{\theta}}\big)^d \to \big(\ell^n_{q,\frac{1}{1-\theta}}\big)'\Big\| \leqslant C_{m,r}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell^n_r)}\|z^{(3)}\|_{\ell_{q,\infty}} \cdots \|z^{(m)}\|_{\ell_{q,\infty}}\|\varphi\|_{\ell_1(\mathcal{J}(m,n))'}$$

para todo $0 < \theta < 1$. Usando la ecuación (8.13) y tomando supremo, esto da

$$\Big\|T^1(\theta) : \ell^n_{q,\frac{1}{1-\theta}} \times \big(\ell^n_{q,\frac{1}{\theta}}\big)^d \times \underbrace{\big(\ell^n_{q,\infty}\big)^d \times \cdots \times \big(\ell^n_{q,\infty}\big)^d}_{m-2} \to \ell_1(\mathcal{J}(m,n))\Big\| \leqslant C_{m,r}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell^n_r)}\,.$$

Asumamos ahora, para $1 \leqslant k \leqslant m-2$, que

$$T^{k-1}(\theta) : \ell^n_{q,\left(\frac{1}{1-\theta}\right)^{k-1}} \times \underbrace{(\ell^n_{q,\frac{1}{\theta}})^d \times \cdots \times (\ell^n_{q,\frac{1}{\theta}})^d}_{k-1} \times \underbrace{(\ell^n_{q,\infty})^d \times \cdots \times (\ell^n_{q,\infty})^d}_{m-k} \to \ell_1(\mathcal{J}(m,n))$$

tiene norma menor o igual que $C_{m,r}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell^n_r)}$. Por otro lado, consideremos la aplicación definida por el Teorema 8.1.1 (ver (8.6))

$$T_{k+1} : \underbrace{\ell^n_{q,\infty} \times \cdots \times \ell^n_{q,\infty}}_{k} \times \ell^n_{q,1} \times \underbrace{(\ell^n_{q,\infty})^d \times \cdots \times (\ell^n_{q,\infty})^d}_{m-k-1} \to \ell_1(\mathcal{J}(m,n))$$

que (recordando (8.12)) también tiene norma menor o igual que $C_{m,r}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}$. Como $\|\ell^n_{q,\frac{1}{\theta}} \hookrightarrow \ell^n_{q,\infty}\| = 1$ (recordando (8.8)) tenemos

$$T_{k+1} : \ell^n_{q,\infty} \times \underbrace{(\ell^n_{q,\frac{1}{\theta}})^d \times \cdots \times (\ell^n_{q,\frac{1}{\theta}})^d}_{k-1} \times \ell_{q,1} \times \underbrace{(\ell^n_{q,\infty})^d \times \cdots \times (\ell^n_{q,\infty})^d}_{m-k-1} \to \ell_1(\mathcal{J}(m,n))$$

que nuevamente tiene norma acotada por $C_{m,r}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}$. Fijados $\varphi \in \big(\ell_1(\mathcal{J}(m,n))\big)'$ y $z^{(i)} \in (\mathbb{C}^n)^d$ para $i \neq 1, k$ y, tomando $v = (z^{(2)}, \ldots, z^{(k)}, z^{(k+2)}, \ldots, z^{(m)}, \varphi)$ tenemos, por (8.11) y (8.12), que

$$\begin{aligned}
&\big\|(T^{k-1}(\theta))_v : (\ell^n_{q,\infty})^d \to \big(\ell^n_{q,(\frac{1}{1-\theta})^{k-1}}\big)'\big\| \\
&\qquad \leqslant C_{m,r}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}\|\varphi\|_{\ell_1(\mathcal{J}(m,n))'}\|z^{(2)}\|_{\ell_{q,\frac{1}{\theta}}} \cdots \|z^{(k)}\|_{\ell_{q,\frac{1}{\theta}}}\|z^{(k+2)}\|_{\ell_{q,\infty}} \cdots \|z^{(m)}\|_{\ell_{q,\infty}}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&\big\|(T_{k+1})_v : (\ell^n_{q,1})^d \to \big(\ell^n_{q,\infty}\big)'\big\| \\
&\qquad \leqslant C_{m,r}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}\|\varphi\|_{\ell_1(\mathcal{J}(m,n))'}\|z^{(2)}\|_{\ell_{q,\frac{1}{\theta}}} \cdots \|z^{(k)}\|_{\ell_{q,\frac{1}{\theta}}}\|z^{(k+2)}\|_{\ell_{q,\infty}} \cdots \|z^{(m)}\|_{\ell_{q,\infty}}.
\end{aligned}$$

Nuevamente, podemos interpolar usando el Teorema 8.2.3, (8.9) y (8.10) para tener

$$\begin{aligned}
&\big\|(T^{k}(\theta)_v : (\ell^n_{q,\frac{1}{\theta}})^d \to \big(\ell^n_{q,\frac{1}{(1-\theta)^k}}\big)'\big\| \\
&\qquad \leqslant C_{m,r}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}\|\varphi\|_{\ell_1(\mathcal{J}(m,n))'}\|z^{(2)}\|_{\ell_{q,\frac{1}{\theta}}} \cdots \|z^{(k)}\|_{\ell_{q,\frac{1}{\theta}}}\|z^{(k+2)}\|_{\ell_{q,\infty}} \cdots \|z^{(m)}\|_{\ell_{q,\infty}}
\end{aligned}$$

para todo $0 < \theta < 1$. Tomando supremo como antes esto da que la norma de la forma multilineal $T^k(\theta)$

$$\big\|T^k(\theta) : \ell^n_{q,(\frac{1}{1-\theta})^k} \times \underbrace{(\ell^n_{q,\frac{1}{\theta}})^d \times \cdots \times (\ell^n_{q,\frac{1}{\theta}})^d}_{k} \times \underbrace{(\ell^n_{q,\infty})^d \times \cdots \times (\ell^n_{q,\infty})^d}_{m-k-1} \to \ell_1(\mathcal{J}(m,n))\big\|,$$

esta acotada por $\leqslant C_{m,r}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}$ para todo $0 < \theta < 1$. □

Demostración del Teorema 8.2.1. Para $m \geqslant 5$, tomemos $\theta = \frac{\log(m+\frac{3}{2})}{m-1+\log(m+\frac{3}{2})}$ y $k = m-2$. Luego $\frac{1}{\theta} \geqslant \frac{m}{\log(m)}$ y

$$\Big(\frac{1}{1-\theta}\Big)^k = \Big(1 + \frac{\log(m+\frac{3}{2})}{m-1}\Big)^{m-2} \geqslant \frac{m}{\log m}.$$

Por lo tanto $\|\ell^n_{q,(\frac{1}{1-\theta})^k} \hookrightarrow \ell^n_{q,\frac{m}{\log(m)}}\| = \|\ell^n_{q,\frac{1}{\theta}} \hookrightarrow \ell^n_{q,\frac{m}{\log(m)}}\| = 1$. Usando el Lema 8.2.4 con $k = m-2$ el resultado se sigue. Para $m = 3$ tomemos $\theta = \frac{1}{2}$ y $k = 1$ en el Lema 8.2.4, para $m = 4$ tomemos $\theta = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ y $k = 2$. □

Finalizamos esta sección con algunos comentarios al respecto de la hipercontractividad vinculada a la inclusión de $\ell_{q,s}$ en $mon\mathcal{P}(^m\ell_r)$. Para el caso de ℓ_∞ es sabido que (ver [BDF+17, Theorem 2.1]) que la inclusión $\ell_{\frac{2m}{m-1},\infty}$ en $mon\mathcal{P}(^m\ell_\infty)$ es hipercontractiva en el sentido de que existe una constante $C > 0$ tal que para todo polinomio homogéneo $P \in \mathcal{P}(^m\ell_\infty)$, vale que

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P)z_{\mathbf{j}}| \leqslant C^m \|z\|^m_{\ell_{\frac{2m}{m-1},\infty}} \|P\|_{P(^m\ell_\infty)}.$$

Observación 8.2.5. Para $1 < r \leqslant 2$, aunque no sepamos si $\ell_{q,\infty}$ se encuentra dentro de $mon\mathcal{P}(^m\ell_r)$ es fácil ver que no podemos esperar tener una desigualdad hipercontractiva como la anterior.

Si existiera tal constante, procediendo como en la demostración de la inclusión superior en el Teorema 6.2.1 (ver (6.3)) con $m = \lfloor \log(n+1)\rfloor$ tendríamos que

$$\frac{1}{\|z\|_{\ell_{q,\log m}} \log(n+1)^{1-\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^n |z_j^*|,$$

está acotada independientemente de n para todo $z \in \ell_{q,\log m}$. Tomemos ahora $z = (j^{-1/q}\log(j)^{-2/\log(m)})_j$. Luego $\|z\|_{\ell_{q,\log m}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j\log^2(j)}\right)^{\frac{1}{\log m}}$. Pero,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|z\|_{\ell_{q,\log m}} \log(n+1)^{1-\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^n |z_j^*| &\gg \frac{1}{\log(n+1)^{1-\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{1/q}\log(j)^{\frac{2}{\log m}}} \\ &\gg \frac{e^2}{c\log(n+1)^{1-\frac{1}{r}}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{1/q}} \geqslant \frac{e^2}{c\log(n+1)^{1-\frac{1}{r}}} n^{1/q'}q'.\end{aligned}$$

Como $q' = mr' = \lfloor \log(n+1)\rfloor r'$, la última expresión tiene un comportamiento asintótico menor que $\log(n)^{\frac{1}{r}}$. Esto muestra que no puede existir una constante $C > 0$ tal que para todo n y m y todo polinomio m-homogéneo en n variables complejas $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ valga

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P)z_{\mathbf{j}}| \leqslant C^m \|z\|^m_{\ell_{q,\log m}} \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}.$$

Por otro lado, aplicando cuidadosamente las ideas desarrolladas en esta sección, es posible obtener desigualdades hipercontractivas en algunos casos.

Observación 8.2.6. Dado $\varepsilon > 0$, existe una constante $C > 0$ tal que para todo $m \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$ y todo $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P)z_{\mathbf{j}}| \leqslant C(1+\varepsilon)^m \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \|z\|^m_{\ell^n_{q,2}}.$$

Para ver esto, fijemos $1 < r \leqslant 2$, $m \geqslant 3$, y tomemos z, $z^{(m-2)}$, $z^{(m-1)}$, $w \in \mathbb{C}^n$ tales que $z^{(m-1)} = z^{(m-1)*}$ y $w = w^*$. Luego, usando el Teorema 2.1.7 y el Lema 3.4.3, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{j_1}\dots z_{j_{m-3}} z^{(m-2)}_{j_{m-2}} z^{(m-1)}_{j_{m-1}} w_{j_m}| \\
&\leqslant em\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-1,n)} |z_{j_1}\dots z_{j_{m-3}} z^{(m-2)}_{j_{m-2}} z^{(m-1)}_{j_{m-1}}| \cdot \Big(\frac{(m-1)^{m-1}}{\alpha(\mathbf{j})^{\alpha(\mathbf{j})}}\Big)^{1/r} \Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} w^r_{j_m}\Big)^{1/r} \\
&\leqslant em^3 Cm^{e^{r'-1}}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \sum_{j_{m-2}=1}^{n} |z^{(m-2)}_{j_{m-2}}| \Big(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-3,j_{m-2})} |\mathbf{j}||z_{\mathbf{j}}|\Big) \sum_{j_{m-1}=j_{m-2}}^{n} |z^{(m-1)}_{j_{m-1}}| \Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} w^r_{j_m}\Big)^{1/r} \\
&\leqslant Cm^{e^{r'}}\|w\|_{\ell_{q,\infty}}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \sum_{j_{m-2}=1}^{n} |z^{(m-2)}_{j_{m-2}}| \Big(\sum_{l=1}^{j_{m-2}} |z_l|\Big)^{m-3} \sum_{j_{m-1}=j_{m-2}}^{n} |z^{(m-1)}_{j_{m-1}}| j_{m-1}^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \\
&\leqslant Cm^{e^{r'}}\|w\|_{\ell_{q,\infty}}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \sum_{j_{m-2}=1}^{n} |z^{(m-2)}_{j_{m-2}}| \Big((j_{m-2})^{1-\frac{1}{q}}\|z\|_{\ell_{q,\infty}}\Big)^{m-3} \|z^{(m-1)}\|_{\ell_{q,\infty}} (r'+1) j_{m-2}^{\frac{2}{q'}-\frac{1}{r'}} \\
&\leqslant (r'+1)Cm^{e^{r'}}\|w\|_{\ell_{q,\infty}}\|z\|^{m-3}_{\ell_{q,\infty}}\|z^{(m-2)}\|_{\ell_{q,1}}\|z^{(m-1)}\|_{\ell_{q,\infty}}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)},
\end{aligned}$$

donde en la penúltima desigualdad usamos una cota para la norma de la identidad de ℓ_1^k en $\ell^k_{q,\infty}$ que podemos encontrar por ejemplo en [DM06, Lemma 22]. Por otro lado, tenemos también que

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{j_1}\dots z_{j_{m-3}} z^{(m-2)}_{j_{m-2}} z^{(m-1)}_{j_{m-1}} w_{j_m}| \\
&\leqslant em\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-1,n)} |z_{j_1}\dots z_{j_{m-3}} z^{(m-2)}_{j_{m-2}} z^{(m-1)}_{j_{m-1}}| \cdot \Big(\frac{(m-1)^{m-1}}{\alpha(\mathbf{j})^{\alpha(\mathbf{j})}}\Big)^{1/r} \Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} w^r_{j_m}\Big)^{1/r} \\
&\leqslant em^3 Cm^{e^{r'-1}}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \sum_{j_{m-1}=1}^{n} |z^{(m-1)}_{j_{m-1}}| \Big(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-3,j_{m-2})} |\mathbf{j}||z_{\mathbf{j}}|\Big) \sum_{j_{m-2}=1}^{j_{m-1}} |z^{(m-2)}_{j_{m-2}}| \Big(\sum_{j_m=j_{m-1}}^{n} w^r_{j_m}\Big)^{1/r} \\
&\leqslant Cm^{e^{r'}}\|w\|_{\ell_{q,\infty}}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \sum_{j_{m-1}=1}^{n} |z^{(m-1)}_{j_{m-1}}| \Big(\sum_{l=1}^{j_{m-2}} |z_l|\Big)^{m-3} \sum_{j_{m-2}=1}^{j_{m-1}} |z^{(m-2)}_{j_{m-2}}| j_{m-1}^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \\
&\leqslant Cm^{e^{r'}}\|w\|_{\ell_{q,\infty}}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \sum_{j_{m-1}=1}^{n} |z^{(m-1)}_{j_{m-1}}| \Big((j_{m-2})^{1-\frac{1}{q}}\|z\|_{\ell_{q,\infty}}\Big)^{m-3} j_{m-1}^{1-\frac{1}{q}} \|z^{(m-2)}\|_{\ell_{q,\infty}} j_{m-1}^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}} \\
&= Cm^{e^{r'}}\|w\|_{\ell_{q,\infty}}\|z\|^{m-3}_{\ell_{q,\infty}}\|z^{(m-2)}\|_{\ell_{q,\infty}}\|z^{(m-1)}\|_{\ell_{q,1}}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}.
\end{aligned}$$

Luego, procediendo como en el Lema 8.2.4 podemos construir un operador acotado de $\ell^d_{q,\infty}$ en $\big(\ell_{q,1}\big)'$ y también de $\ell^d_{q,1}$ en $\big(\ell_{q,\infty}\big)'$. Aplicando el K-método de interpolación restringido al cono de sucesiones no crecientes a este operador podemos concluir que para todo $z = z^*$, vale

$$\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}| \leqslant \sqrt{(1+r')}Cm^{e^{r'}}\|z\|^{m-2}_{\ell_{q,\infty}}\|z\|^2_{\ell_{q,2}}\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \leqslant C(1+\varepsilon)^m\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)}\|z\|^m_{\ell_q^n}.$$

Por lo tanto, usando el Corolario 3.3.6, se concluye lo que queríamos probar.

Con un poco más de trabajo se puede probar, de un modo similar, que dado cualquier $s \geqslant 1$ y $\varepsilon > 0$, existe cierto m_0 y alguna constante $C > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, todo $m \geqslant m_0$ y todo polinomio $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ tenemos

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}}(P) z_{\mathbf{j}}| \leqslant C(1+\varepsilon)^m \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_r^n)} \|z\|^m_{\ell^n_{q,s}}.$$

8.3. Multiplicadores

Una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un *multiplicador* para $mon\mathcal{P}(^m\ell_r)$ si

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot \ell_r \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_r),$$

donde el producto $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot \ell_r$ es simplemente la multiplicación coordenada a coordenada. Sea $p = (p_1, p_2, \dots)$ la sucesión de los números primos. Es bien sabido que para $r \geqslant 2$, la sucesión $\frac{1}{p^{\frac{m-1}{2m}}}$ es un multiplicador para $mon\mathcal{P}(^m\ell_r)$ (esto puede verse como una consecuencia inmediata de [BDS19, Theorem 5.1 (3)]).

Para $1 < r < 2$ en [BDS19, Theorem 5.3.] los autores prueban esto con una diferencia de ε, mostrando que para cada m y todo $\varepsilon > \frac{1}{r}$ vale que

$$\frac{1}{p^{\sigma_m}\big(\log(p)\big)^{\varepsilon}} \cdot \ell_r \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_r), \tag{8.14}$$

donde $\sigma_m = \frac{m-1}{m}\big(1 - \frac{1}{r}\big)$. Como una consecuencia de nuestros resultados, podemos mejorar esto. Mostramos que, para $1 < r \leqslant 2$, incluso la sucesión $(\frac{1}{n^{\sigma_m}})_{n\in\mathbb{N}}$ es un multiplicador para $mon\mathcal{P}(^m\ell_r)$.

Teorema 8.3.1. *Para $1 < r < 2$ y $m \geqslant 3$ pongamos $\sigma_m = \frac{m-1}{m}\big(1 - \frac{1}{r}\big)$. Entonces,*

$$\Big(\frac{1}{n^{\sigma_m}}\Big)_n \cdot \ell_r \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_r),$$

y σ_m es lo mejor posible.

Demostración. Como una consecuencia del Teorema 8.0.1 sabemos que $\ell_{q,r} \subset mon\mathcal{P}(^m\ell_r)$, con lo cual para probar este resultado es suficiente ver que si $z \in \ell_r$ entonces, $\big(\frac{1}{n^{\sigma_m}}\big)_n \cdot z \in \ell_{q,r}$. Supongamos que $z \in \ell_r$ es un elemento arbitrario (no necesariamente igual a z^*). Como $r > q$ sabemos que la semi-norma $\|\cdot\|_{\ell_{q,r}}$ es equivalente a la siguiente norma maximal (como figura en (1.2))

$$\|w\|_{\ell_{(q,r)}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{q}-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} w_k^* \right)^r \right)^{1/r}.$$

Luego, si $w = \left(\frac{z_n}{n^{\sigma_m}}\right)_n$, por la *desigualdad de reordenamiento de Hardy-Littlewood* (Lema 6.3.5) es fácil ver que

$$\sum_{k=1}^{n} w_k^* \leqslant \sum_{k=1}^{n} z_k^* \frac{1}{k^{\sigma_m}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}\left\|\left(\frac{z_n}{n^{\sigma_m}}\right)_n\right\|_{\ell_{q,r}} \sim \left\|\left(\frac{z_n}{n^{\sigma_m}}\right)_n\right\|_{\ell_{(q,r)}} &\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{q}-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k^* \frac{1}{k^{\sigma_m}}\right)^r\right)^{1/r} \\ = \left\|\left(\frac{z_n^*}{n^{\sigma_m}}\right)_n\right\|_{\ell_{(q,r)}} \sim \left\|\left(\frac{z_n^*}{n^{\sigma_m}}\right)_n\right\|_{\ell_{q,r}} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left((\frac{z_n^*}{n^{\sigma_m}})^* n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\right)^r\right)^{1/r} = \|z\|_{\ell_r} < \infty,\end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad, usamos que $\sigma_m = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$.
Para ver que el exponente es óptimo tomemos, como siempre, $q = (mr')'$. Ahora, si $(z_n)_n = \left(\frac{1}{n^{1/r}\log(n+1)^{2/r}}\right)_n \in \ell_r$ para todo $\varepsilon > 0$ es fácil ver que la sucesión $\left(\frac{z_n}{n^{\sigma_m-\varepsilon}}\right)_n \notin \ell_{q,\infty} \supset mon\mathcal{P}(^m\ell_r)$. $\square$

Para $m = 2$ no podemos mostrar que la sucesión $\left(\frac{1}{n^{\sigma_2}}\right)_n$ es un multiplicador para $mon\mathcal{P}(^2\ell_r)$ pero usando que $\ell_q \subset mon\mathcal{P}(^2\ell_r)$ y el Teorema 8.0.1, es fácil ver que vale la inclusión

$$\frac{1}{p^{\sigma_2}\big(\log(p)\big)^{\varepsilon}} \cdot \ell_r \subset mon\mathcal{P}\left(^2\ell_r\right),$$

para *todo* $\varepsilon > 0$ extendiendo [BDS19, Theorem 5.3.] (ver también (8.14)). Dejamos los detalles para el lector.

Apéndice A

Expansión en serie monomial

Dedicamos este apéndice a la demostración de la Proposición 3.1.2:

Proposición A.0.1 (Proposición 3.1.2)**.** *Dados $1 < p, q \leqslant \infty$, para $X = \ell_{p,q}$ tenemos que*

$$mon\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \Big\{ z \in \mathcal{R} : f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha \;\; \textit{para todo } f \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \Big\},$$

para $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ siendo $H_b(X), H_\infty(B_X)$ or $\mathcal{P}(^m X)$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$.

Recordemos que, para que tenga sentido, la convergencia de la expansión monomial de una dada función holomorfa necesita ser incondicional. Como las convergencias incondicional y absoluta son conceptos equivalentes en $\mathbb{C}$, para toda familia de funciones holomorfas en un dominio de Reinhardt $\mathcal{F}(\mathcal{R})$, vale que

$$\Big\{ z \in \mathcal{R} : f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha \;\; \text{para toda } f \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \Big\} \subset mon\mathcal{F}(\mathcal{R}). \tag{A.1}$$

Ahora daremos algunos resultados necesarios para probar la inclusión inversa.

Dado un espacio de suceciones X podemos considerar su *dual de Köthe*

$$X^\times := \left\{ y \in \mathbb{C}^\mathbb{N} : \sum_{k \geqslant 1} |y_k x_k| < \infty \text{ para toda } x \in X \right\},$$

que, dotado de la norma,

$$\|y\|_{X^\times} := \sup_{x \in B_X} \sum_{k \geqslant 1} |y_k x_k|,$$

es un espacio de sucesiones simétrico. Vale la pena mencionar que para $1 \leqslant p < 1$ vale $\ell_p^\times = \ell_{p'}$ y además $\ell_\infty^\times = \ell_1$. Esto muestra en particular que el dual de Köthe y el dual clásico, dado por los funcionales continuos, no siempre coinciden. Observemos que para todo espacio de sucesiones X vale que $X^\times \subset X'$ isométricamente.

Como para todo espacio de sucesiones X su dual de Köthe es nuevamente un espacio de sucesiones podemos considerar $(X^\times)^\times$, Lo notaremos simplemente $X^{\times\times}$. Es fácil ver que $X \subset X^{\times\times}$.

El siguiente es un resultado clásico en la teoría de espacios de sucesiones, un prueba de este hecho puede encontrarse en [Maz10, Teorema 1.3.11].

Observación A.0.2. Para todo espacio de sucesiones X los siguientes son equivalentes:

a) $[e_n : n \in \mathbb{N}]$ es denso en X.

b) X es separable.

c) $X' = X^\times$.

Un corolario de la observación previa es que para un espacio de sucesiones separable X vale que

$$(X')^\times = X^{\times\times}. \tag{A.2}$$

Observación A.0.3. Dado un espacio de sucesiones separable X, el conjunto de convergencia monomial de una familia de funcionales lineales $X' = \mathcal{L}(X) = \mathcal{P}(^1X)$ es el dual de Köethe de X', i.e.,

$$monX' = mon\mathcal{P}(^1X) = (X')^\times = X^{\times\times}.$$

Demostración. Primero, como X es separable, por la Observación A.0.2 tenemos que $X' = X^\times$. Esto nos permite pensar a X' como un espacio de sucesiones en sí mismo. Dada $\phi \in X'$ podemos asociarle una sucesión $(\phi(e_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^\mathbb{N}$.

Por otro lado, para todo $\phi \in X'$, como es un polinomio 1-homogéneo, tenemos que $a_\alpha(\phi) = 0$ para $|[\alpha]| \neq 1$. Es fácil ver que $a_\alpha(\phi) = \phi(e_k)$ si $\alpha = e_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para $z \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ y $\phi \in X'$ se sigue que

$$\sum_{k\geqslant 1} |\phi(e_k)z_k| = \sum_{\alpha\in\Lambda(1)} |a_\alpha(\phi)z^\alpha|. \tag{A.3}$$

Luego, si $z \in (X')^\times$ el lado izquierdo de la ecuación (A.3) suma (es finito) y, por lo tanto, $z \in monX'$. Al revés, $z \in monX'$ implica que el lado derecho en la ecuación (A.3) es finito para todo $\phi \in X'$ y luego $z \in (X')^\times$. Esto muestra que $monX' = (X')^\times = X^{\times\times}$ usando (A.2). $\square$

Veremos luego que, para espacios de sucesiones reflexivos y separables, podemos lograr nuestro propósito gracias a la observación previa. Este es el caso de $\ell_{p,q}$ con $1 < p < \infty$ y $1 \leqslant q < \infty$ gracias al Teorema 1.1.4. Para el caso de $\ell_{p,\infty}$ con $1 < p < \infty$ necesitaremos el siguiente lema.

Lema A.0.4. *Para $1 < p < \infty$ vale que $\ell_{p,\infty}^\times = \ell_{p',1}$.*

Demostración. Comenzamos probando que $\ell_{p,\infty}^{\times} \subset \ell_{p',1}$. Tomemos $z \in \ell_{p,\infty}^{\times}$, luego

$$\begin{aligned}\|z\|_{\ell_{p',1}} &= \|(k^{\frac{1}{p'}-1} z_k*)_{k\geqslant 1}\|_{\ell_1}\\ &= \sum_{k\geqslant 1} |k^{-1/p} z_k^*| < \infty,\end{aligned}$$

ya que $(k^{-1/p})_{k\geqslant 1} \in \ell_{p,\infty}$ y $z^* \in \ell_{p,\infty}^{\times}$ por ser un espacio de sucesiones simétrico. Hemos probado que $z \in \ell_{p',1}$.

Por el otro lado, sea $z \in \ell_{p',1}$ y tomemos $x \in \ell_{q,\infty}$. Usando la *desigualdad de reordenamiento de Hardy-Littlewood* (Lema 6.3.5) se sigue (usando la desigualdad de Hölder) que

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 1} |z_k x_k| &\leqslant \sum_{k\geqslant 1} z_k^* x_k^*\\ &= \sum_{k\geqslant 1} k^{-1/p} z_k^* k^{1/p} x_k^*\\ &\leqslant \|z\|_{\ell_{p',1}} \|x\|_{\ell_{p,\infty}} < \infty,\end{aligned}$$

luego $z \in \ell_{p,\infty}^{\times}$. □

Resumimos algunos de los resultados previos en el próximo lema.

Lema A.0.5. *Siempre que $X = \ell_{p,q}$ con $1 < p < \infty$ y $1 < q \leqslant \infty$ se sigue que*

$$monX' = mon\mathcal{P}(^1X) = X^{\times\times} = X.$$

Demostración. Sea $X = \ell_{p,q}$ con $1 < p, q < \infty$, por el Teorema 1.1.4, tenemos que X es reflexivo. Gracias a que además es separable, la Observación A.0.2 y la Observación A.0.3, vale que

$$mon\mathcal{P}(^1X) \subset (X')^{\times} = X^{\times\times} = (X')' = X.$$

Finalmente tomemos $X = \ell_{p,\infty}$ con $1 < p < \infty$, que también es separable. Usando la Observación A.0.3 y la desigualdad en (A.2) tenemos que

$$mon\mathcal{P}(^1X) = X^{\times\times} \subset (X^{\times})'.$$

Usando el Lema A.0.4 y el Teorema 1.1.4 tenemos

$$(X^{\times})' = (\ell_{p',1})' = \ell_{p,\infty} = X,$$

luego se sigue que $X^{\times\times} \subset (X^{\times})' \subset X$. Como, para todo espacio de sucesiones X vale que $X \subset X^{\times\times}$ tenemos lo que queríamos. □

Para todo espacio de sucesiones separable X vale que $X' \subset H_b(X) \subset H_\infty(B_X)$ y (3.3), esto implica que

$$monH_\infty(B_X) \subset monH_b(X) \subset monX' = X^{\times\times}.$$

En particular, para aquellos X tales que $X = X^{\times\times}$, tenemos

$$mon\mathcal{F} = \left\{ z \in X : \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(f) z^\alpha| < \infty \text{ para todo } f \in \mathcal{F} \right\}, \tag{A.4}$$

para $\mathcal{F}$ siendo $H_\infty(B_X)$ o $H_b(X)$. Cabe señalar que la importancia en la igualdad anterior es el hecho de que todos los elementos en $mon\mathcal{F}$ se encuentran en X.

La misma conclusión vale para la familia de polinomios homogéneos. Para ver que esto es así necesitamos [DGMSP19, Remark 10.7]. Damos la prueba por completitud.

Proposición A.0.6. *Dado un espacio de sucesiones X, para todo $m \in \mathbb{N}$ vale que*

$$mon\mathcal{P}(^{m+1}X) \subset mon\mathcal{P}(^m X).$$

Demostración. Fijemos $u \in mon\mathcal{P}(^{m+1}X)$ no nulo y $P \in \mathcal{P}(^m X)$. Para cierto $i \in \mathbb{N}$ tal que $u_i \neq 0$ definamos $Q \in \mathcal{P}(^{m+1}X)$ por $Q(z) = z_i P(z)$. Es sencillo ver que

$$a_\alpha(Q) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_i = 0 \\ a_{\tilde{\alpha}}(P) & \text{si } \alpha_i > 0, \end{cases}$$

donde $\tilde{\alpha}_j = \alpha_j + \delta_{i,j}$, luego

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(P) u^\alpha| &= \frac{1}{u_i} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(P) u^\alpha u_i| \\ &= \frac{1}{u_i} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_{\tilde{\alpha}}(P) u^{\tilde{\alpha}}| \\ &= \frac{1}{u_i} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(Q) u^\alpha| < \infty. \end{aligned}$$

□

Dado $m \in \mathbb{N}$, usando que $mon\mathcal{P}(^m X) \subset \mathcal{P}(^1 X) = (X')^\times$ (lo cual sigue simplemente de la Proposición A.0.6) y procediendo como antes, tenemos que

$$mon\mathcal{P}(^m X) = \left\{ z \in X : \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(f) z^\alpha| < \infty \text{ para todo } f \in \mathcal{P}(^m X) \right\}, \tag{A.5}$$

para todo espacio de sucesiones separable X tal que $X^{\times\times} = X$.

La siguiente proposición esencialmente establece que, dado un espacio de sucesiones separable X, cualquier elemento en el conjunto de convergencia monomial para la familia $H_\infty(B_X)$ debe estar dentro de la bola de X. Una prueba de este resultado puede encontrarse en [DGMSP19, Proposición 20.3].

Proposición A.0.7. *Dado un espacio de sucesiones X, vale que $X \cap monH_\infty(B_X) \subset B_X$.*

Como dijimos antes, si usamos la Proposición A.0.7 y la Observación A.0.2, para todo espacio de sucesiones separable X tal que $X^{\times\times} = X$ tenemos

$$monH_\infty(B_X) = \left\{ z \in B_X : \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(f) z^\alpha| < \infty \text{ para toda } f \in H_\infty(B_X) \right\}. \tag{A.6}$$

Observación A.0.8. Sea X un espacio de sucesiones separable tal que $X^{\times\times} = X$ luego

$$mon\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \left\{ z \in \mathcal{R} : \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(f) z^\alpha| < \infty \text{ para toda } f \in \mathcal{F} \right\},$$

para $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ siendo $H_\infty(B_X), H_b(X)$ o $\mathcal{P}(^mX)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y, por su puesto, $\mathcal{R}$ siendo B_X o X respectivamente.

Notemos que la Observación A.0.8 se sigue usando (A.4) para $H_b(X)$, (A.5), para $\mathcal{P}(^mX)$ y (A.6) para $H_\infty(B_X)$.

En [BDF+17, Equation (15)] los autores enuncian que

$$monH_\infty(B_{c_0}) = monH_\infty(B_{\ell_\infty}) \text{ y } mon\mathcal{P}(^m c_0) = mon\mathcal{P}(^m \ell_\infty). \tag{A.7}$$

Allí citan el artículo [DMP09, Remark 6.4] donde se demuestra el primer enunciado de (A.7). El argumento usado allí viene de un resultado del artículo [DG89]. En dicho artículo Davie y Gamelin muestran que toda $f \in H_\infty(B_X)$ puede extenderse a cierta $\widehat{f} \in H_\infty(B_{X''})$ sin cambiar su norma. Para $f \in H_b(X)$ es estándar que esto puede hacerse y nuevamente implica que

$$monH_b(c_0) = monH_b(\ell_\infty). \tag{A.8}$$

Ahora, gracias a las ecuaciones en (A.7) y por el Teorema 3.2.2 y el Teorema 3.2.3 se sigue que

$$\begin{aligned} mon\mathcal{P}(^m c_0) &= mon\mathcal{P}(^m \ell_\infty) \subset c_0, \\ monH_\infty(B_{c_0}) &= monH_\infty(B_{\ell_\infty}) \subset \overline{B_{c_0}}. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Finalmente por la ecuación (A.8) y el Teorema 6.3.2 tenemos que

$$monH_b(c_0) = monH_b(\ell_\infty) \subset c_0. \tag{A.10}$$

La siguiente proposición es una versión ligeramente más general de la Proposición 3.1.2, la cuál es el objetivo de este apéndice.

Proposición A.0.9. *Sea X el espacio ℓ_∞ o cualquier espacio de sucesiones separable tal que $X^{\times\times} = X$. Entonces vale que*

$$mon\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \left\{ z \in \mathcal{R} : f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha \text{ para toda } f \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \right\},$$

para $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ igual a $H_\infty(B_X), H_b(X)$ o $\mathcal{P}(^mX)$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y, por supuesto, $\mathcal{R}$ siendo B_X o X respectivamente.

Demostración. Por (A.1) sólo resta probar que

$$mon\mathcal{F}(\mathcal{R}) \subset \left\{ z \in \mathcal{R} : f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha \text{ para toda } f \in \mathcal{F} \right\}.$$

Fijemos $z \in mon\mathcal{F}(\mathcal{R})$. En el caso en que X sea ℓ_∞, por las ecuaciones (A.9) y (A.10) tenemos que $z \in c_0$ o $z \in B_{c_0}$ dependiendo de $\mathcal{F}(\mathcal{R})$. En el caso en que X sea un espacio de sucesiones separable tal que $X^{\times\times} = X$ usando la Observación A.0.8 tenemos que $z \in \mathcal{R}$.

Toda función $f \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ es continua en $\mathcal{R}$ por ser holomorfa allí. Como $[e_n : n \in \mathbb{N}]$ es denso en c_0 o X tenemos que $\pi_n(z) \to z$, cuando $n \to \infty$, y luego $f(\pi_n(z)) \to f(z)$. Por otro lado, como $\pi_n(z) \in \mathcal{R}_n$ vale que

$$f(\pi_n(z)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha(f) z^\alpha,$$

y $z \in mon\mathcal{F}(\mathcal{R})$ con lo cual la expansión monomial converge absolutamente en z, todo esto implica que

$$\lim_{n\to\infty} f(\pi_n(z)) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha.$$

Por la unicidad del límite tenemos $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha$. $\square$

Ahora podemos lograr el objetivo de este apéndice. La prueba se deduce directamente de lo que vimos.

Demostración de la Proposición 3.1.2. Gracias al Lema A.0.5 se tiene que $X^{\times\times} = X$ para $X = \ell_{p,q}$ con $1 < p < \infty$ y $1 < q \leqslant \infty$. Como X es separable usando la Proposición A.0.9 se sigue que

$$mon\mathcal{F}(\mathcal{R}) = \left\{ z \in \mathcal{R} : f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha \text{ para toda } f \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \right\}.$$

Para $X = \ell_\infty$ esto es explícitamente probado en la Proposición A.0.9. $\square$

Bibliografía

[Aiz00] Lev Aizenberg. Multidimensional analogues of Bohr's theorem on power series. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 128(4):1147–1155, 2000.

[AK06] Fernando Albiac and Nigel J Kalton. *Topics in Banach space theory*, volume 233. Springer Science & Business Media, 2006.

[And63] Tsuyoshi Andô. On a pair of commutative contractions. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 24:88–90, 1963.

[Bay02] Frédéric Bayart. Hardy spaces of Dirichlet series and their composition operators. *Monatshefte für Mathematik*, 136(3):203–236, 2002.

[Bay12] Frédéric Bayart. Maximum modulus of random polynomials. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 63(1):21–39, 2012.

[BB04] Enrico Bombieri and Jean Bourgain. A remark on Bohr's inequality. *International Mathematics Research Notices*, 2004(80):4307–4330, 2004.

[BBEM90] Bernard Beauzamy, Enrico Bombieri, Per Enflo, and Hugh L Montgomery. Products of polynomials in many variables. *Journal of Number Theory*, 36(2):219–245, 1990.

[BDF$^+$17] Frédéric Bayart, Andreas Defant, Leonhard Frerick, Manuel Maestre, and Pablo Sevilla-Peris. Multipliers of dirichlet series and monomial series expansions of holomorphic functions in infinitely many variables. *Mathematische Annalen*, 368(1-2):837–876, 2017.

[BDS19] Frédéric Bayart, Andreas Defant, and Sunke Schlüters. Monomial convergence for holomorphic functions on ℓ_r. *Journal d'Analyse Mathématique*, 138(1):107–134, 2019.

[BH31] Henri Frédéric Bohnenblust and Einar Hille. On the absolute convergence of Dirichlet series. *Annals of Mathematics*, pages 600–622, 1931.

[BL76] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation spaces. An introduction.* Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.

[Ble01] Ron Blei. *Analysis in integer and fractional dimensions*, volume 71 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[BM19] Frédéric Bayart and Mieczysław Mastyło. Interpolation of Hardy spaces of Dirichlet series. *Journal of Functional Analysis*, 277(3):786–805, 2019.

[Boa00] Harold P Boas. Majorant series. *J. Korean Math. Soc*, 37(2):321–337, 2000.

[Boh13] Harald Bohr. Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variablen in der Theorie der Dirichletschen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1913:441–488, 1913.

[Boh14] Harald Bohr. A theorem concerning power series. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):1–5, 1914.

[BPR18] Frédéric Bayart, Daniel Pellegrino, and Pilar Rueda. On coincidence results for summing multilinear operators: interpolation, ℓ_1-spaces and cotype. *arXiv preprint arXiv:1805.12500*, 2018.

[BPSS14] Frédéric Bayart, Daniel Pellegrino, and Juan B Seoane-Sepúlveda. The Bohr radius of the n-dimensional polydisk is equivalent to $\sqrt{\frac{(\log n)}{n}}$. *Advances in Mathematics*, 264:726–746, 2014.

[BS88] Colin Bennett and Robert C Sharpley. *Interpolation of operators*, volume 129. Academic press, 1988.

[CG11] Daniel Carando and Daniel Galicer. Unconditionality in tensor products and ideals of polynomials, multilinear forms and operators. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 62(4):845–869, 2011.

[CM96] Joan Cerda and Joaquim Martin. Interpolation of operators on decreasing functions. *Mathematica Scandinavica*, pages 233–245, 1996.

[DDGM01] Andreas Defant, Juan Carlos Díaz, Domingo García, and Manuel Maestre. Unconditional basis and Gordon-Lewis constants for spaces of polynomials. *Journal of Functional Analysis*, 181(1):119–145, 2001.

[DF06] Andreas Defant and Leonhard Frerick. A logarithmic lower bound for multi-dimensional Bohr radii. *Israel Journal of Mathematics*, 152(1):17–28, 2006.

[DF11] Andreas Defant and Leonhard Frerick. The Bohr radius of the unit ball of ℓ_p^n. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*, 2011(660):131–147, 2011.

[DFOC$^+$11] Andreas Defant, Leonhard Frerick, Joaquim Ortega-Cerda, Myriam Ounaïes, and Kristian Seip. The Bohnenblust-Hille inequality for homogeneous polynomials is hypercontractive. *Annals of mathematics*, 174(1):485–497, 2011.

[DG89] Alexander M Davie and Theodore W Gamelin. A theorem on polynomial-star approximation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 106(2):351–356, 1989.

[DGM03] Andreas Defant, Domingo García, and Manuel Maestre. Bohr's power series theorem and local banach space theory-to the memory of our friend Klaus Floret. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, 557:173–197, 2003.

[DGM04] Andreas Defant, Domingo García, and Manuel Maestre. Maximum moduli of unimodular polynomials. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 41(1):209–229, 2004.

[DGMPG08] Andreas Defant, Domingo García, Manuel Maestre, and David Pérez-García. Bohr's strip for vector valued dirichlet series. *Mathematische Annalen*, 342(3):533–555, 2008.

[DGMSP19] Andreas Defant, Domingo García, Manuel Maestre, and Pablo Sevilla-Peris. *Dirichlet Series and Holomorphic Funcions in High Dimensions*, volume 37 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, 2019.

[Din99] Seán Dineen. *Complex analysis on infinite dimensional spaces*. Springer Monographs in Mathematics. London: Springer, 1999.

[Dix76] Peter G Dixon. The von Neumann inequality for polynomials of degree greater than two. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(2):369–375, 1976.

[Dix95] Peter G. Dixon. Banach algebras satisfying the non-unital von Neumann inequality. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 27(4):359–362, 1995.

[DJT95] Joe Diestel, Hans Jarchow, and Andrew Tonge. *Absolutely summing operators*, volume 43. Cambridge University Press, 1995.

[DM00] Andreas Defant and Carsten Michels. A complex interpolation formula for tensor products of vector-valued banach function spaces. *Archiv der Mathematik*, 74(6):441–451, 2000.

[DM03] Andreas Defant and Mieczyslaw Mastylo. On interpolation of tensor products of Banach spaces. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A: Matemáticas (RACSAM)*, 97(2):209, 2003.

[DM06] Andreas Defant and Carsten Michels. Norms of tensor product identities. *Note di Matematica*, 25(1):129–166, 2006.

[DM15] Andreas Defant and Mieczysław Mastyło. L^p-norms and Mahler's measure of polynomials on the n-dimensional torus. *Constructive Approximation*, pages 1–15, 2015.

[DMP09] Andreas Defant, Manuel Maestre, and Christopher Prengel. Domains of convergence for monomial expansions of holomorphic functions in infinitely many variables. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2009(634):13–49, 2009.

[DP06] Andreas Defant and Christopher Prengel. Harald Bohr meets Stefan Banach. *London Mathematical Society Lecture Note Series*, 337:317, 2006.

[DSP16] Verónica Dimant and Pablo Sevilla-Peris. Summation of coefficients of polynomials on ℓ_p spaces. *Publicacions Matemàtiques*, 60(2):289–310, 2016.

[DT89] Seán Dineen and Richard Timoney. Absolute bases, tensor products and a theorem of Bohr. *Studia Mathematica*, 94(3):227–234, 1989.

[Fen03] Bao Qi Feng. Equivalence constants for certain matrix norms. *Linear algebra and its applications*, 374:247–253, 2003.

[FT07] Bao Qi Feng and Andrew Tonge. Equivalence constants for certain matrix norms II. *Linear Algebra and Its Applications*, 2(420):388–399, 2007.

[GMMa] Daniel Galicer, Martín Mansilla, and Santiago Muro. Mixed Bohr radius in several variables. *Transactions of the AMS, in press.*

[GMMb] Daniel Galicer, Martín Mansilla, and Santiago Muro. The sup-norm vs. the norm of the coefficients: equivalence constants for homogeneous polynomials. *Mathematische Nachrichten, in press.*

[GMSP15] Daniel Galicer, Santiago Muro, and Pablo Sevilla-Peris. Asymptotic estimates on the von Neumann inequality for homogeneous polynomials. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2015.

[Gol87] Moshe Goldberg. Equivalence constants for l_p norms of matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 21(2):173–179, 1987.

[Har72] Lawrence A Harris. Bounds on the derivatives of holomorphic functions of vectors. In *Proc. Colloq. Analysis, Rio de Janeiro*, volume 145, page 163, 1972.

[Hil09] David Hilbert. Wesen und ziele einer analysis der unendlichvielen unabhangigen variablen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 27:59–74, 1909.

[HL34] Godfrey H Hardy and John E Littlewood. Bilinear forms bounded in space [p, q]. *The Quarterly Journal of Mathematics*, (1):241–254, 1934.

[HLP52] Godfrey H Hardy, Jhon E Littlewood, and George Polya. Inequalities cambridge univ. *Press, Cambridge*, (1988), 1952.

[Kah93] Jean-Pierre Kahane. *Some random series of functions*, volume 5. Cambridge University Press, 1993.

[KB97] Dmitry Khavinson and Harold P Boas. Bohr's power series theorem in several variables. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(10):2975–2979, 1997.

[Kou91] Omran Kouba. On the interpolation of injective or projective tensor products of Banach spaces. *Journal of Functional Analysis*, 96(1):38–61, 1991.

[Lem99] László Lempert. The dolbeault complex in infinite dimensions ii. *Journal of the American Mathematical Society*, 12(3):775–793, 1999.

[Lit30] John E Littlewood. On bounded bilinear forms in an infinite number of variables. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1:164–174, 1930.

[Maz10] Martın D. Mazzitelli. Tesis de licenciatura. 2010.

[MT79] Anna Maria Mantero and Andrew Tonge. Banach algebras and von Neumann's inequality. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(2):309–334, 1979.

[Muj10] Jorge Mujica. *Complex analysis in Banach spaces.* Courier Corporation, 2010.

[OCOS09] Joaquim Ortega-Cerdà, Myriam Ounaïes, and Kristian Seip. The Sidon constant for homogeneous polynomials. *arXiv preprint arXiv:0903.1455*, 2009.

[Pis78] Gilles Pisier. Some results on Banach spaces without local unconditional structure. *Compositio Mathematica*, 37(1):3–19, 1978.

[Pis86] Gilles Pisier. *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces.* Number 60. American Mathematical Soc., 1986.

[Pis01] Gilles Pisier. *Similarity problems and completely bounded maps*, volume 1618 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, expanded edition, 2001. Includes the solution to "The Halmos problem".

[PP81] Tarcisio Praciano-Pereira. On bounded multilinear forms on a class of ℓ_p spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 81(2):561–568, 1981.

[Röd85] Vojtech Rödl. On a packing and covering problem. *European J. Combin.*, 6(1):69–78, 1985.

[Rya87] Raymond A Ryan. Holomorphic mappings on ℓ_1. *Transactions of the American Mathematical Society*, 302(2):797–811, 1987.

[Sag72] Yoram Sagher. An application of interpolation theory to fourier series. *Studia Mathematica*, 41(2):169–181, 1972.

[Sch78] Carsten Schütt. Unconditionality in tensor products. *Israel Journal of Mathematics*, 31(3):209–216, 1978.

[Sch15] Sunke C U Schlüters. *Unconditionality in spaces of holomorphic functions.* PhD thesis, Universität Oldenburg, 2015.

[SN74] Béla Sz.-Nagy. *Unitary dilations of Hilbert space operators and related topics.* American Mathematical Society, Providence, R.I., 1974. Expository Lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of New Hampshire, Durham, N.H., June 7-11, 1971, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 19.

[Sza81] Stanislaw Jerzy Szarek. A note on the paper of Shütt "Unconditionality in tensor products". In *Colloquium Mathematicae*, volume 45, pages 273–276. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 1981.

[Toe13] Otto Toeplitz. Ueber eine bei den dirichletschen reihen auftretende aufgabe aus der theorie der potenzreihen von unendlich vielen veränderlichen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1913(3):417–432, 1913.

[Ton00] Andrew Tonge. Equivalence constants for matrix norms: a problem of Goldberg. *Linear Algebra and its Applications*, 306(1):1–13, 2000.

[Var74] Nicholas Th. Varopoulos. On an inequality of von Neumann and an application of the metric theory of tensor products to operators theory. *J. Functional Analysis*, 16:83–100, 1974.

[vN51] Johann von Neumann. Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes. *Math. Nachr.*, 4:258–281, 1951.

[Wei80] Fred B Weissler. Logarithmic Sobolev inequalities and hypercontractive estimates on the circle. *Journal of Functional Analysis*, 37(2):218–234, 1980.

Índice alfabético